Лист № 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay & \Big| \cdot x\,dt \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx & \Big| \cdot y\,dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\,dx = -a y x\,dt & \Big| \cdot b \\ y\,dy = -b x y\,dt & \Big| \cdot a \end{cases}$$

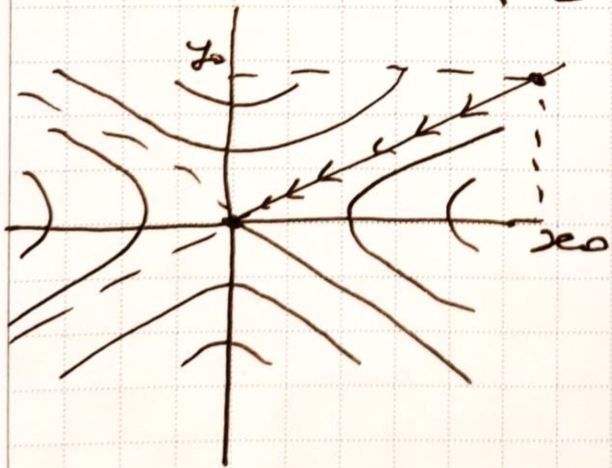
$$b x\,dx - a y\,dy = 0$$

$$\int: \quad \boxed{\frac{bx^2}{2} - \frac{ay^2}{2} = C} \quad (\circ)$$

гиперболы

если $C = 0 \Rightarrow$ асимптоты $\Rightarrow$

$$\pm\sqrt{\frac{b}{2}}\,x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}\,y$$



$$\boxed{y_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}\ x_0} \quad (*)$$

Условие начальных численностей x_0 и y_0 для взаимного уничтожения
$(x \to 0;\ y \to 0)$

Лист № 2

Решение диф. ур-й:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \end{cases} \rightarrow \ddot{x} = -a\dot{y} \Rightarrow \ddot{x} = +abx$$

$$\ddot{x} = abx \qquad ab = k^2$$

$$\ddot{x} - k^2 x = 0$$

Характеристич. ур-е: $\lambda^2 - k^2 = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 = k; \quad \lambda_2 = -k$$

Решение: $\boxed{x(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}}$ (1)

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}$$

но $\dot{x} = -ay \Rightarrow y = -\frac{\dot{x}}{a} \Rightarrow$

$$\boxed{y(t) = \frac{C_1 k e^{kt}}{-a} + \frac{C_2 k e^{-kt}}{a}} \quad (2)$$

Начальные условия: при $t=0$: $x(0) = x_0$
$y(0) = y_0$

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 \\ y_0 = -C_1 \frac{k}{a} + C_2 \frac{k}{a} \end{cases} \Rightarrow C_1 = x_0 - C_2$$

$$y_0 = -\frac{k}{a}(x_0 - C_2) + C_2 \frac{k}{a} = \frac{2k}{a} C_2 - \frac{k x_0}{a}$$

Лист № 3

$$y_0 = \frac{2k}{a} C_2 - \frac{k}{a} x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{a}{2k}\left(y_0 + \frac{k}{a} x_0\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\left(y_0 + \sqrt{\frac{b}{a}}x_0\right)$$

$$\boxed{C_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\, y_0 + \frac{1}{2} x_0}$$

$$C_1 = x_0 - C_2 = x_0 - \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\, y_0$$

$$\boxed{C_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\, y_0}$$

Вернемся к $x(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} \\ y(t) = \dfrac{C_1 k e^{kt}}{-a} + \dfrac{C_2 k e^{-kt}}{a} \end{cases} \qquad k = \sqrt{ab}$$

$$y(t) = -C_1 \sqrt{\frac{b}{a}} e^{kt} + C_2 \sqrt{\frac{b}{a}} e^{-kt}$$

$$\begin{cases} y^2 = C_1^2 \frac{b}{a} e^{2kt} - 2C_1C_2 \frac{b}{a} e^0 + C_2^2 \frac{b}{a} e^{-2kt} & (3) \\ x^2 = C_1^2 e^{2kt} + 2C_1C_2 e^0 + C_2^2 e^{-2kt} & (4) \end{cases}$$

$(4)\frac{b}{a} - (3)$:

$$\boxed{x^2 \frac{b}{a} - y^2 = 4 C_1 C_2 \frac{b}{a}} \quad (5)$$

Было: $\frac{bx^2}{2} - \frac{ay^2}{2} = C \quad (0)$

Лист № 4

$$(5) \Rightarrow \frac{x^2 b}{2} - \frac{y^2 a}{2} = \frac{a}{2} 4 \varsigma \xi \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$(5),(0) \Rightarrow \boxed{C = 2\varsigma\xi b}$$

$$C = 2b\varsigma\xi = 2b\left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,y_0\right)\left(\frac{x_0}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,y_0\right)$$

Требуем, чтобы $C = 0$ при $x_0 > 0$, $y_0 > 0$:

$$C = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,y_0\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}\,x_0}$$

Получили то же условие (*)

Конец.

Проверка прошла.