

1.2. Гироскоп в кардановом подвесе, указатель направления ортодромии, гиromаятник - гировертикаль

Краткие сведения по теории

- **Гироскоп в кардановом подвесе** (рис.1.4) - способ реализации сферического движения тела.
- **Указатель направления ортодромии (УНО)** - трехстепенной астатический гироскоп в кардановом подвесе, кинетический момент ротора 3 (рис.1.5) которого лежит в горизонтальной плоскости.
- **Принцип действия УНО:** гироскоп сохраняет свою первоначально выставленную *горизонтальную* ориентацию оси.

Кинетическая энергия и обобщенные силы

$$E = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} [C_2 + (A + C_1) \cos^2 \beta + B_1 \sin^2 \beta] + \frac{\dot{\beta}^2}{2} (A + A_1) + \frac{1}{2} B (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 \quad (1.34)$$

$$Q_\alpha = -\mu_\alpha \dot{\alpha} + Mom_2 \cos \omega_2 t \quad (1.35)$$

$$Q_\beta = -\mu_\beta \dot{\beta} - mgy_C \cos \alpha \cos \beta + Mom_1 \cos \omega_1 t, \quad (1.36)$$

• Уравнения движения УНО

$$(C_2 + (A + C_1) \cos^2 \beta + B_1 \sin^2 \beta) \ddot{\alpha} + \mu_\alpha \dot{\alpha} - (A + C_1 - B_1) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta + H \dot{\beta} \cos \beta = Mom_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.37)$$

$$(A + A_1) \ddot{\beta} + \mu_\beta \dot{\beta} + (A + C_1 - B_1) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = -mgy_C \cos \beta + Mom_1 \cos \omega_1 t, \quad (1.38)$$

$$H = B(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) = const$$

“Прецессионные” уравнения движения

$$H \dot{\beta} \cos \beta = Mom_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.39)$$

$$-H \dot{\alpha} \cos \beta = -mgy_C \cos \beta + Mom_1 \cos \omega_1 t \quad (1.40)$$

$$(C_2 + A + C_1) \ddot{\alpha} + \mu_\alpha \dot{\alpha} + H \dot{\beta} = Mom_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.41)$$

$$(A + A_1) \ddot{\beta} + \mu_\beta \dot{\beta} - H \dot{\alpha} = -mgy_C + Mom_1 \cos \omega_1 t \quad (1.42)$$

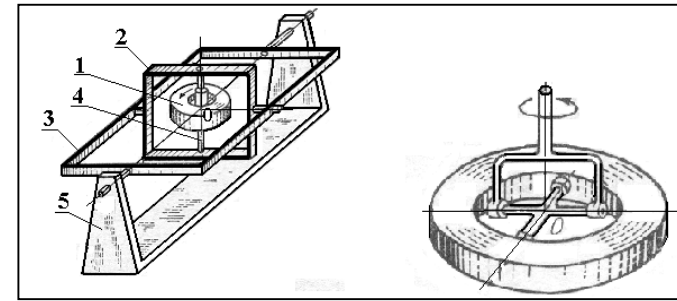


Рис.1.4. Внешний и внутренний кардановый подвес: 1 – ротор, 2,3 – внутренняя и наружная рамки, 4 – ось вращения ротора, 5 – основание

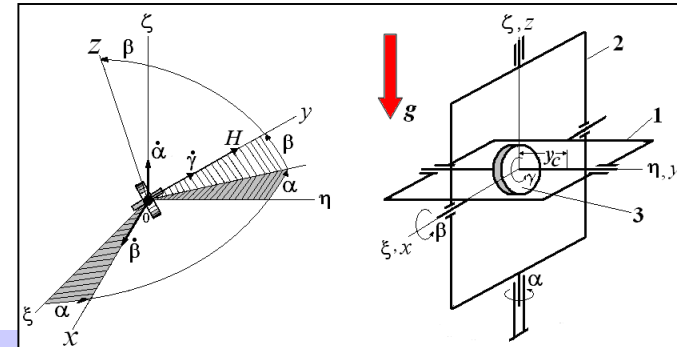


Рис.1.5. Системы координат, кинематическая схема: 1,2 – внутренняя и наружная рамки; 3 – ротор

Линеаризованные уравнения движения

• Кардановая погрешность гироскопов

При наклонном движении основания, плоскости отсчета измеряемых гироскопом углов **не совпадают** с плоскостями углов поворота объекта.

Такое несовпадение для УНО показано рис.1.6, когда объект имеет ненулевой угол тангажа.

Если тангаж $\theta=0$, то угол поворота наружной рамки определяет курс объекта $\alpha = \psi$.

Если $\theta \neq 0$, то $\alpha \neq \psi$, т.е. имеет место кардановая погрешность.

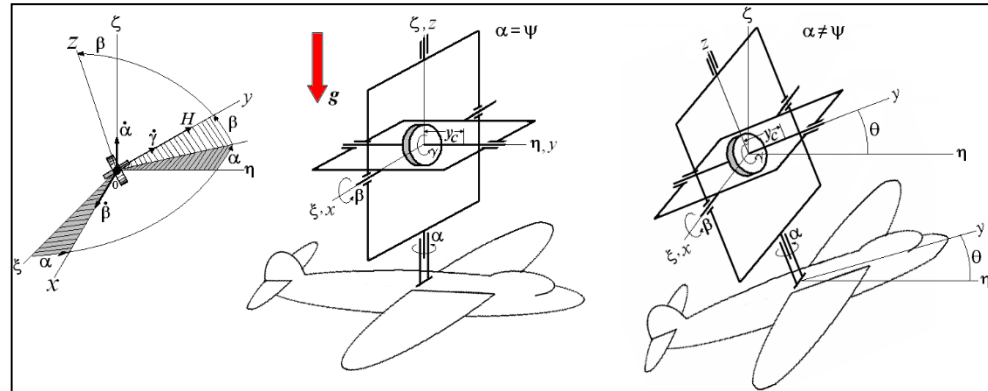


Рис.1.6. К пояснению кардановой погрешности УНО

Формула для малой кардановой погрешности $\Delta\psi$ измерения курса ψ гироскопом направления для малых углов тангажа и крена:

$$\Delta\psi = \psi_1 - \psi \approx \frac{\theta^2 - \kappa^2}{4} \sin 2\psi - \theta\kappa \cos^2 \psi \quad (1.43)$$

θ , κ – малые углы тангажа и крена самолета; ψ_1 , ψ – приборный и истинный курс.

Например, при $\theta = 0$, $\kappa \neq 0$ **тогда** кардановая погрешность имеет место на **интеркардинальных курсах** $\psi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.

• Влияние моментов сил взаимодействия между рамками карданового подвеса и ротором на уход УНО при нутационных колебаниях (уход Магнуса, 1955)

Осредненная угловая скорость наружной рамки

$$\langle \dot{\alpha}_2 \rangle = \frac{(A_{00} \dot{\alpha}_0^2 + (A_1 + A) \dot{\beta}_0^2)(C_2 + B_1)}{2HA_{00} \cos \beta_0} \operatorname{tg} \beta_0 \quad (1.44)$$

$$A_{00} = C_2 + (A + C_1) \cos^2 \beta_0 + B_1 \sin^2 \beta_0$$

• **Уход Магнуса** астатического гироскопа в кардановом подвесе **имеет место** при:
отсутствии диссипации энергии; **неперпендикулярности** рамок подвеса ($\operatorname{tg} \beta_0 \neq 0$);
наличии начального импульса.

• **Гиromаятник (ГМ)** - трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе (рис.1.7), центр масс z_C смещен относительно точки подвеса по главной оси. Такой гироскоп может быть использован для определения вертикали места (**гировертикаль ГВ**). Кинетический момент ротора 3 выставляется вертикально и $z_C < 0$ соответствует устойчивому положению равновесия маятника.

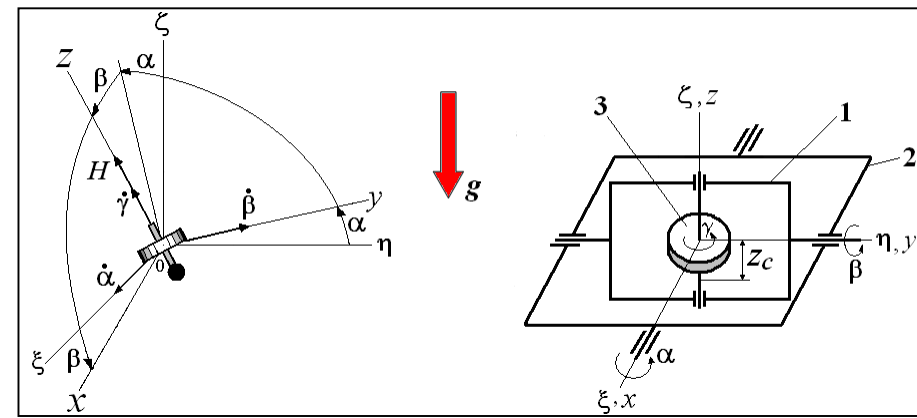


Рис.1.7. Системы координат, кинематическая схема: 1,2 – внутренняя и наружные рамки; 2 – наружная рамка подвеса; 3 – ротор

• **Принцип действия ГМ-ГВ:** гироскоп сохраняет свою первоначально выставленную *вертикальную* ориентацию оси.

Кинетическая энергия и обобщенные силы

$$E = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} [A_2 + (A + A_1) \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta] + \frac{\dot{\beta}^2}{2} (A + B_1) + \frac{1}{2} C (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 \quad (1.45)$$

$$Q_\alpha = -\mu_\alpha \dot{\alpha} + mgz_C \sin \alpha \cos \beta + Mom_2 \cos \omega_2 t \quad (1.46)$$

$$Q_\beta = -\mu_\beta \dot{\beta} + mgz_C \sin \beta \cos \alpha + Mom_1 \cos \omega_1 t, \quad (1.47)$$

• **Уравнения движения ГМ-ГВ**

$$(A_2 + (A + A_1) \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta) \ddot{\alpha} + \mu_\alpha \dot{\alpha} - (A + A_1 - C_1) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta + H \dot{\beta} \cos \beta = mgz_C \sin \alpha \cos \beta + Mom_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.48)$$

$$(A + B_1) \ddot{\beta} + \mu_\beta \dot{\beta} + (A + A_1 - C_1) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = mgz_C \sin \beta \cos \alpha + Mom_1 \cos \omega_1 t, \quad (1.49)$$

$$H = C(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) = const$$

Коэффициент демпфирования

$$\mu_{(\alpha, \beta)} = \mu_{0(\alpha, \beta)} + 0,5(\mu_{\max} + \mu_{\min}) + 0,5(\mu_{\max} - \mu_{\min}) \cos p_D t \quad (1.50)$$

“Прецессионные” уравнения движения

$$H \dot{\beta} \cos \beta = mgz_C \sin \alpha \cos \beta + Mom_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.51)$$

$$-H \dot{\alpha} \cos \beta = mgz_C \sin \beta \cos \alpha + Mom_1 \cos \omega_1 t \quad (1.52)$$

$$(A_2 + A + A_1) \ddot{\alpha} + \mu_\alpha \dot{\alpha} + H \dot{\beta} = mgz_C \alpha + Mom_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.53)$$

$$(A + B_1) \ddot{\beta} + \mu_\beta \dot{\beta} - H \dot{\alpha} = mgz_C \beta + Mom_1 \cos \omega_1 t \quad (1.54)$$

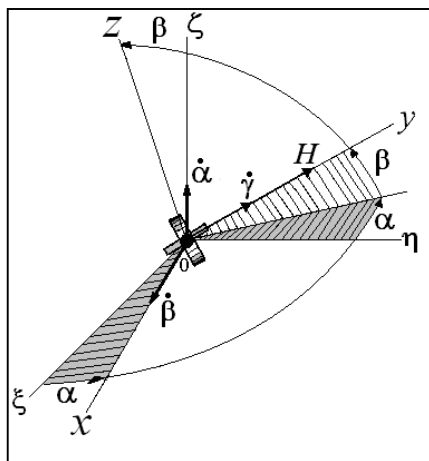
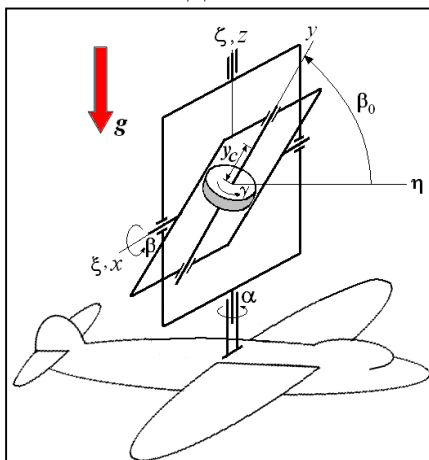
Линеаризованные уравнения движения

Задача 1.8. Пользуясь приближенными “прецессионными” уравнениями движения (1.39),(1.40) указателя направления ортодромии (рис. к задаче 1.8), **определить** указанные характеристики движения по заданным исходным данным (табл. к задаче 1.8). **Проверить и подтвердить полученные результаты компьютерными экспериментами с помощью программы динамической визуализации “Gyro-K-N”.**

Знак “?” означает “найти”.

Таблица к задаче 1.8

К задаче 1.8



№ Вар	H Н·м·с	M_x Н·м	M_z Н·м	β_0 рад	$P=mg$ Н	y_C м	$\dot{\alpha}$ с ⁻¹	$\beta_1=\beta(t_1)$ рад
1	2	0,2	0	$\pi/3$	0	0	?	-
2	1	0,2	0	$\pi/3$	0	0	?	-
3	2	0	0	0	4	$5 \cdot 10^{-6}$?	-
4	2	0	0,2	0	0	0	-	? $t_1=1c$
5	2	0	0,2	$\pi/6$	0	0	-	? $t_1=1c$
6	2	0	0,3	$\pi/6$	0	0	-	? $t_1=1c$

H – кинетический момент гироскопа;

M_x, M_z – постоянные моменты, приложенные к внутренней и наружной рамкам;

β_0 – начальное отклонение внутренней рамки от горизонтальной плоскости;

y_C – смещение центра масс вдоль оси гироскопа в поле сил тяжести;

$P = mg$ – вес гироскопа;

$\dot{\alpha}$ – угловая скорость прецессии наружной рамки;

$\dot{\beta}, \beta$ – угловая скорость и угол поворота внутренней рамки.

Пример решения практической задачи 1.8

Пусть кинетический момент $H = 4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Начальное отклонение внутренней рамки $\beta_0 = \pi/4$. Смещение центра масс отсутствует. **Необходимо определить:**

а) угловую скорость прецессии $\dot{\alpha}$ наружной рамки и угол β отклонения внутренней рамки при действии постоянного момента относительно оси внутренней рамки $M_x = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$;

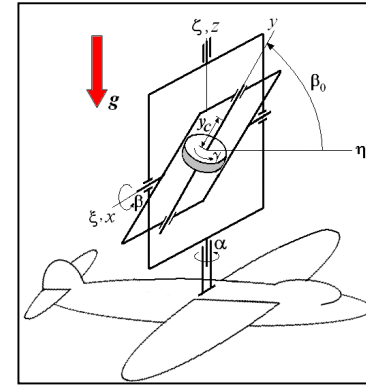
б) выражения для угловых скоростей прецессии $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, угла поворота $\beta(t)$ внутренней рамки и $\beta(t_1)$ при $t_1=1\text{с}$ при действии постоянного момента относительно оси наружной рамки $M_z = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$;

Выполним:

а) согласно уравнениям движения (1.39),(1.49): $H\dot{\beta} \cos \beta = 0 \Rightarrow \cos \beta d\beta = 0$

$$\Rightarrow \int \cos \beta d\beta = 0 \Rightarrow \sin \beta = \sin \beta_0 \Rightarrow \beta = \beta_0 = \text{const} = \pi/4$$

$$-H\dot{\alpha} \cos \beta = M_x \Rightarrow \dot{\alpha} = -\frac{M_x}{H \cos \beta} = -\frac{0,1}{4 \cos \pi/4} = \text{const} = -0,025\sqrt{2} \text{ с}^{-1}$$



Ответ Наруж рамка вращается с пост угл скоростью
Внутр рамка отклонена на пост угол

$$\dot{\alpha} = \text{const} = -0,025\sqrt{2} \text{ с}^{-1}$$

$$\beta = \beta_0 = \text{const} = \pi/4 \text{ рад}$$

б) согласно уравнениям движения (1.6),(1.7): $H\dot{\beta} \cos \beta = M_z \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{M_z}{H \cos \beta} \Rightarrow \cos \beta d\beta = \frac{M_z}{H} dt$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{M_z}{H} t + \sin \beta_0 \Rightarrow \sin \beta = 0,025t + \sqrt{2}/2 \Rightarrow \beta(t) = \arcsin(0,025t + \sqrt{2}/2)$$

$$-H\dot{\alpha} \cos \beta = 0 \Rightarrow \dot{\alpha} = 0$$

Ответ Наружная рамка на месте
Внутр рамка вращается по закону

$$\dot{\alpha} = 0$$

$$\dot{\beta} = \frac{M_z}{H \cos \beta}$$

$$\beta(t) = \arcsin(0,025t + \sqrt{2}/2)$$

$$\beta(1) = \arcsin(0,025 + \sqrt{2}/2) \approx 0,82 \text{ рад}$$

Задача 1.9. Определить наименьший курсовой угол ψ самолета и величину **кардановой погрешности** $\Delta\psi$ измерения угла ψ , при котором эта погрешность максимальна. Самолет делает вираж с заданными в таблице к задаче 1.9 углами крена κ и тангажа θ . При решении воспользоваться формулой (1.10).

Таблица к задаче 1.9


Ответы и решения

№ Вар	1	2	3	4	5	6	7	8
Крен, κ°	0	1	1	2	1	2	0	2
Тангаж, θ°	1	0	1	1	2	0	2	2

Пример решения практической задачи 1.9

По формуле (1.43) $\Delta\psi = 0,25(\theta^2 - \kappa^2) \sin 2\psi - \theta\kappa \cos^2 \psi$

Решим задачу при угле крена $\kappa = 5^\circ$ и углах тангажа 1) $\theta = 0^\circ$; 2) $\theta = 1^\circ$.

1) При $\theta = 0^\circ$ $\Delta\psi = -0,25\kappa^2 \sin 2\psi$ 

$\Delta\psi_{\max}$ при курсе $\psi = 45^\circ$.

При крене $\kappa = 5^\circ$ $\Delta\psi_{\max} = -0,25 \cdot 5^2 \sin(2 \cdot 45^\circ) = -6,25^\circ$

Ответ

при курсе $\psi = 45^\circ$ $\Delta\psi_{\max} = -6,25^\circ$

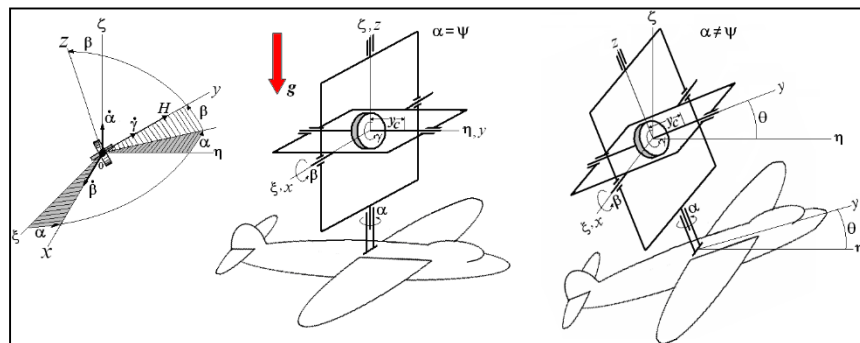
2) При $\theta = 1^\circ$ и $\kappa = 5^\circ$ кардановая погрешность с учетом тригонометрических преобразований

$$\Delta\psi = -6 \sin 2\psi - 5 \cos^2 \psi = -(6 \sin 2\psi + 2,5 \cos 2\psi + 2,5) = -\sqrt{6^2 + 2,5^2} \sin(2\psi + \delta) - 2,5$$

$$\operatorname{tg} \delta = 2,5 / 6 \quad (\delta \approx 23^\circ) \quad \xrightarrow{\text{green arrow}} \quad \Delta\psi_{\max} \text{ при курсе } 2\psi + \delta = 90^\circ. \quad \xrightarrow{\text{green arrow}} \quad \psi = 33,5^\circ.$$

$$\text{При крене } \kappa = 5^\circ \quad \Delta\psi_{\max} = -\sqrt{6^2 + 2,5^2} \sin(2 \cdot 33,5^\circ + 23^\circ) - 2,5 = -9^\circ$$

Ответ при курсе $\psi = 33,5^\circ$ $\Delta\psi_{\max} = -9^\circ$



К задаче 1.9

Задача 1.10. Определить угловую скорость **ухода Магнуса** при исходных данных:

$A=0,005 \div 0,01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $A_1=B_1=C_1=0 \div 0,01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $C_2=0 \div 0,01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $H=1 \div 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$;
начальные условия $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0 \div 1 \text{ рад}$, $\dot{\alpha}_0 = 0 \div 5 \text{ с}^{-1}$, $\dot{\beta}_0 = 0 \div 5 \text{ с}^{-1}$.

Конкретные данные из предлагаемого диапазона задаются преподавателем или выбираются самостоятельно. При решении воспользоваться формулой (1.44).

Проверить и подтвердить полученные результаты компьютерными экспериментами с помощью программы динамической визуализации "Gyro-K-N".

Пример решения практической задачи 1.10

Определить угловую скорость **ухода Магнуса** при исходных данных:

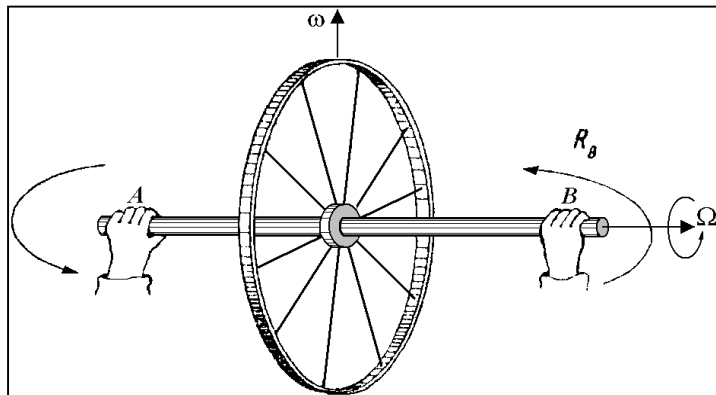
$A = 0,005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $A_1 = B_1 = C_1 = 0,004 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $C_2 = 0,006 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $H = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$;

начальные условия $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1 \text{ рад}$, $\dot{\alpha}_0 = 5 \text{ с}^{-1}$, $\dot{\beta}_0 = 0$.

Формула (1.44) примет вид: $\langle \dot{\alpha}_2 \rangle = \frac{\dot{\alpha}_0^2 (C_2 + B_1)}{2H \cos \beta_0} \text{tg} \beta_0 \approx 0,036 \text{ с}^{-1}$

Ответ Угловая скорость ухода Магнуса при заданных параметрах

$$\langle \dot{\alpha}_2 \rangle = \frac{\dot{\alpha}_0^2 (C_2 + B_1)}{2H \cos \beta_0} \text{tg} \beta_0 \approx 0,036 \text{ с}^{-1}$$

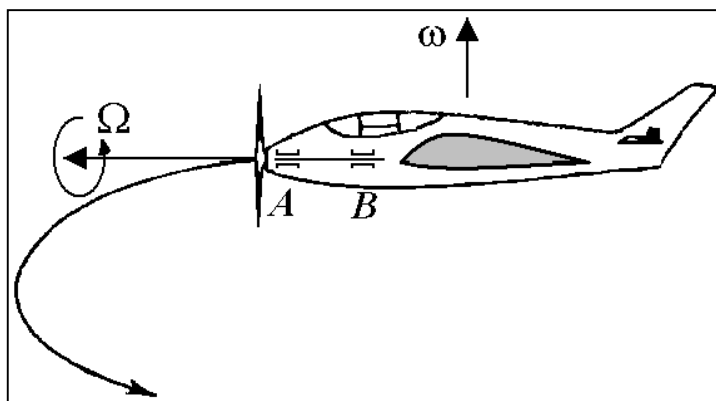


К задаче 1.12

Задача 1.11. Быстровращающееся с угловой скоростью $\Omega=100\text{с}^{-1}$ колесо, закрепленное на горизонтальной оси AB , удерживается в руках, как показано на рисунке. $AB=a=0,2\text{м}$.

Определить *гироскопические силы* [Н], приложенные к кистям рук при вращении оси AB в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega=0,2\text{с}^{-1}$.

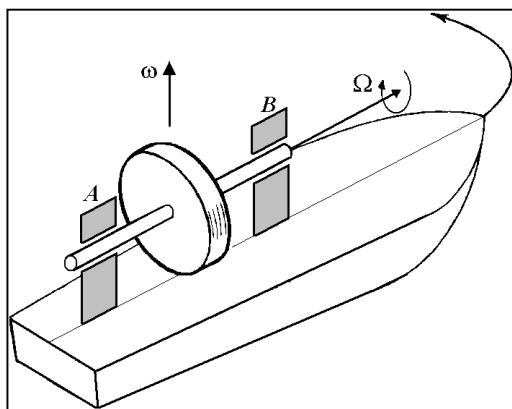
Масса колеса $m=1\text{кг}$, радиус инерции относительно оси AB $i=0,2\text{м}$.



К задаче 1.13

Задача 1.12. Самолет с вращающимся с угловой скоростью $\Omega=200\text{с}^{-1}$ винтом совершает вираж в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega=0,05\text{с}^{-1}$ как показано на рисунке. Момент инерции винта $J=10\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2$. Возникающий гироскопический момент передается через подшипники на самолет и вызывает кабрирование самолета.

Какое *усилие* [Н] должен приложить летчик к штурвалу, чтобы компенсировать аэродинамическими силами гироскопический момент. Расстояние между подшипниками $AB=2\text{ м}$.



К задаче 1.13

Задача 1.13. Турбина корабля, содержащая вал и ротор, закрепленная в подшипниках, вращается с угловой скоростью $\Omega = 300 \text{ с}^{-1}$. Корабль совершает циркуляцию (движется по окружности в горизонтальной плоскости) с угловой скоростью $\omega = 0,1 \text{ с}^{-1}$ как показано на рисунке. Расстояние между подшипниками $AB = 5 \text{ м}$. Масса ротора $m = 2000 \text{ кг}$, радиус инерции относительно оси AB $i = 1 \text{ м}$. Найти *гироскопические реакции* [Н] в подшипниках.

Задача 1.14. Сравнить гиromаятник с математическим маятником длиной ℓ , приравняв их периоды колебаний $T_{ГМ} = \frac{2\pi H}{mgz_C}$, $T_{ММ} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ и найти *приведенную длину* ℓ [м] и период колебаний [с] гиromаятника при следующих характеристиках

$$H = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad m = 1 \text{ кг}; \quad z_C = 0,001 \text{ м}; \quad g \approx 10 \text{ м/с}^2, \quad \pi \approx 3,14.$$

Задача 1.15. Известно, что для уменьшения баллистических (вызванных ускорениями подвижного объекта) погрешностей гиromаятника его настраивают на период Шулера,

$$T_{ГМ} = T_{Ш} \Rightarrow 2\pi \frac{H}{mgz_C} = 2\pi \sqrt{R/g} \approx 5064 \text{ с},$$

где R – радиус Земли. Каким должно быть *смещение центра масс* гиromаятника в поле сил тяжести при $H = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $mg = 50 \text{ Н}$; $\pi \approx 3,14$.

Учебно - исследовательские задачи 2-го уровня сложности

Задача 1.4и. Провести аналитическое и численное исследование указателя направления ортодромии (УНО) в кардановом подвесе (рис.1.5):

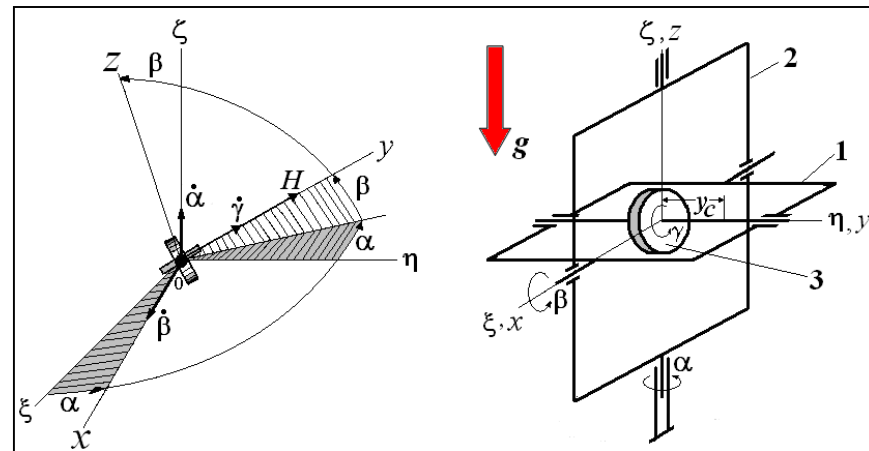
Часть А.

1. Вывести нелинейные уравнения вида (1.37), (1.38) движения гироскопа из уравнений Лагранжа 2-го рода. Кинетическая энергия и обобщенные силы (1.34) - (1.36).
2. Получить из нелинейных уравнений (1.37), (1.38) “прецессионные” уравнения (1.39), (1.40), не учитывающие инерционные члены, моменты вязких сил и нелинейные составляющие, получить линеаризованные уравнения (1.41), (1.42) при $\mu_\alpha = \mu_\beta = 0$ и $Mom_1 = Mom_2 = 0$.
3. Из линеаризованных уравнений движения (1.41), (1.42) при $\mu_\alpha = \mu_\beta = 0$ и $Mom_1 = Mom_2 = 0$ и $y_C \neq 0$ определить собственную частоту колебаний и характер прецессионного и нутационного движения при заданных начальных условиях движения.

Часть Б.

Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации “Gyro-K-N”, подтвердить полученные аналитические результаты.

Дополнительно, по заданию преподавателя, с помощью программы “Gyro-K-N”, исследовать влияние на движение гироскопа моментов инерции рамок, вязкого демпфирования, моментов гармонических внешних сил, вариаций н.у., кинетического момента и других параметров.



Базовые исходные данные

$$H \approx B\dot{\gamma} = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с};$$

$$A=C=0,01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \quad A_1=B_1=C_1=0 \div 0,02 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \quad C_2=0 \div 0,02 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \quad m=1 \text{ кг}; \quad y_C=0,01 \text{ м}; \quad g=9,8 \approx 10 \text{ м/с}^2;$$

$$\text{н. у. } \alpha_0 = 0 \div 1 \text{ рад}; \quad \beta_0 = 0 \div 1 \text{ рад}; \quad \dot{\alpha}_0 = 0 \div 2 \text{ с}^{-1}; \quad \dot{\beta}_0 = 0 \div 2 \text{ с}^{-1} \quad \mu_\alpha, \mu_\beta = 0 \div 0,005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

Пример решения учебно-исследовательской задачи 1.4и

Часть А.

1. Уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \alpha} = Q_{\alpha} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \beta} = Q_{\beta}$$

Кинетическая энергия

$$E = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} [C_2 + (A + C_1) \cos^2 \beta + B_1 \sin^2 \beta] + \frac{\dot{\beta}^2}{2} (A + A_1) + \frac{1}{2} B (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2$$

Обобщенные силы

$$Q_{\alpha} = -\mu_{\alpha} \dot{\alpha} + Mom_2 \cos \omega_2 t \quad Q_{\beta} = -\mu_{\beta} \dot{\beta} - mgy_C \cos \alpha \cos \beta + Mom_1 \cos \omega_1 t,$$

Формализм Лагранжа, сделать, как в **задаче 1.1и**



Нелинейные уравнения движения (1.37), (1.38) **ГН** в кардановом подвесе

$$(C_2 + (A + C_1) \cos^2 \beta + B_1 \sin^2 \beta) \ddot{\alpha} + \mu_{\alpha} \dot{\alpha} - (A + C_1 - B_1) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta + H \dot{\beta} \cos \beta = Mom_2 \cos \omega_2 t,$$

$$(A + A_1) \ddot{\beta} + \mu_{\beta} \dot{\beta} + (A + C_1 - B_1) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = -mgy_C \cos \beta + Mom_1 \cos \omega_1 t,$$

$$H = B(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) = const$$

2. “Прецессионные” уравнения движения (1.39), (1.40)

$$H \dot{\beta} \cos \beta = Mom_2 \cos \omega_2 t,$$

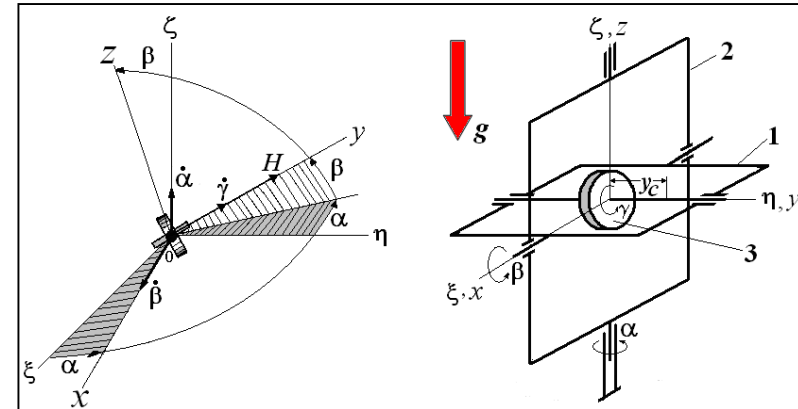
$$-H \dot{\alpha} \cos \beta = -mgy_C \cos \beta + Mom_1 \cos \omega_1 t$$

Линеаризованные уравнения движения

(1.41), (1.42)

$$(C_2 + A + C_1) \ddot{\alpha} + \mu_{\alpha} \dot{\alpha} + H \dot{\beta} = Mom_2 \cos \omega_2 t,$$

$$(A + A_1) \ddot{\beta} + \mu_{\beta} \dot{\beta} - H \dot{\alpha} = -mgy_C + Mom_1 \cos \omega_1 t$$



Линеаризованные уравнения движения (1.41), (1.42) при $\mu_{\alpha} = \mu_{\beta} = 0$, $Mom_1 = Mom_2 = 0$

$$(C_2 + A + C_1) \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} = 0 \tag{1.55}$$

$$(A + A_1) \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} = -mgy_C \tag{1.56}$$

3. Линеаризованные уравнения движения (1.55),(1.56):

$$A_0 \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} = 0$$

$$(A + A_1) \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} = -mgy_c$$

$$A_0 = C_2 + A + C_1$$

После преобразований получим уравнения

$$\ddot{\beta} = -\frac{A_0}{H} \ddot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} + k^2 \dot{\alpha} = mgy_c \frac{H}{(A + A_1)A_0}$$

где, квадрат частоты собственных нутационных колебаний:

$$k^2 = \frac{H^2}{(A + A_1)A_0} \quad (1.57)$$

Решение этих уравнений при н. у. $t = 0, \alpha(0) = \alpha_0, \beta(0) = \beta_0, \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0, \dot{\beta}(0) = \dot{\beta}_0$

$$\dot{\alpha} = D \sin(kt + \delta) + \frac{mgy_c}{H}$$

$$\dot{\beta} = -\sqrt{\frac{A_0}{A + A_1}} D \cos(kt + \delta) \quad (1.58)$$

$$\alpha = -\frac{D}{k} (\cos(kt + \delta) - \cos \delta) + \frac{mgy_c}{H} t + \alpha_0$$

$$\beta = -\frac{D}{k} \sqrt{\frac{A_0}{A + A_1}} (\sin(kt + \delta) - \sin \delta) + \beta_0 \quad (1.59)$$

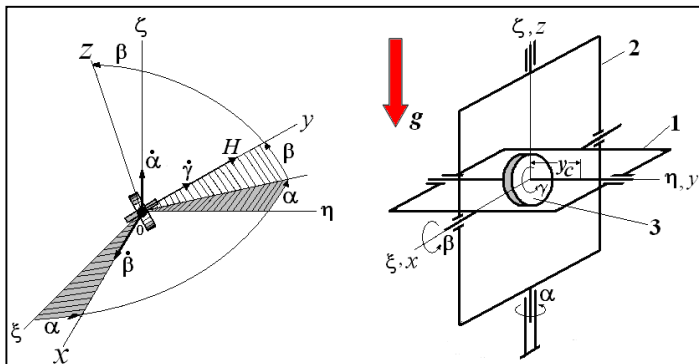
Произвольные
постоянные

$$D = \sqrt{\left(\dot{\alpha}_0 - \frac{mgy_c}{H}\right)^2 + \frac{A + A_1}{A_0} \dot{\beta}_0^2}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \left(\dot{\alpha}_0 - \frac{mgy_c}{H}\right) \sqrt{\frac{A_0}{A + A_1}} / \dot{\beta}_0 \quad (1.60)$$

Выводы

- Для случая **ГН** с маятниковым моментом и отсутствием вязкого демпфирования имеет место **прецессия** наружной рамки с *постоянной* скоростью по углу α и “быстрыми” **нутационными колебаниями** частоты k .
- Одновременно совершаются **нутационные колебания** внутренней рамки по углу β с частотой k .



Пример расчета

$$A = C = A_1 = B_1 = C_1 = C_2 = 0,01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \quad m = 1 \text{ кг}; \quad y_C = 0,01 \text{ м}; \quad g = 9,8 \approx 10 \text{ м/с}^2;$$

$$H \approx B\dot{\gamma} = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с};$$

$$\text{н. у. } \alpha_0 = \beta_0 = 0; \quad \dot{\alpha}_0 = 0,1 \text{ с}^{-1}; \quad \dot{\beta}_0 = 0; \quad \mu_\alpha = \mu_\beta = 0.$$

Собственная частота малых нутационных колебаний гироскопа по (1.57)

$$k = \frac{H}{\sqrt{(A + A_1)(C_2 + A + C_1)}} = \frac{0,01}{\sqrt{0,02 \cdot 0,03}} \approx 4 \text{ с}^{-1}$$

Законы движения наружной рамки (прецессия и нутационные колебания) и внутренней рамки (нутационные колебания) по (1.58) по (1.59):

$$\alpha = t - 0,225 \sin 4t$$

$$\dot{\alpha} = 1 - 0,9 \cos 4t$$

$$\beta = -0,276(1 - \cos 4t)$$

$$\dot{\beta} = -1,1 \sin 4t$$

