

2.2. Практические и учебно-исследовательские задачи для динамически настраиваемых гироскопов с использованием компьютерной 3D модели

Краткие сведения по теории

- **Роторный вибрационный динамически настраиваемый гироскоп (ДНГ)** в простейшем случае (рис.2.3, [1]) состоит из **быстровращающегося ротора 1**, расположенного на валу 2 двигателя 3 и соединенного с валом упругой связью в виде торсионов 4. Торсионы имеют конечную жесткость на кручение и “бесконечную” на изгиб. Вал двигателя 3 быстро вращается с постоянной угловой скоростью Ω и ротор имеет постоянный кинетический момент $H=A\Omega$.
- **Принцип действия ДНГ** - измеряемая переносная угловая скорость $\overline{M} = \overline{H} \times \overline{\omega}$ ования (корпуса прибора) обуславливает возникновение **гироскопического момента** , приводящего к гармоническим вибрациям ротора вокруг оси торсионов. Амплитуда этих вибраций зависит от величины угловой скорости ω , а фаза вибраций – от направления вращения основания.
- **Главная особенность ДНГ** – в нем возможен выбор упругих характеристик торсионов, связанных с инерционными характеристиками ротора и угловой скоростью его вращения Ω с тем, чтобы амплитуда вибраций была максимальной. Такой выбор параметров получил название **динамической (резонансной) настройки**.

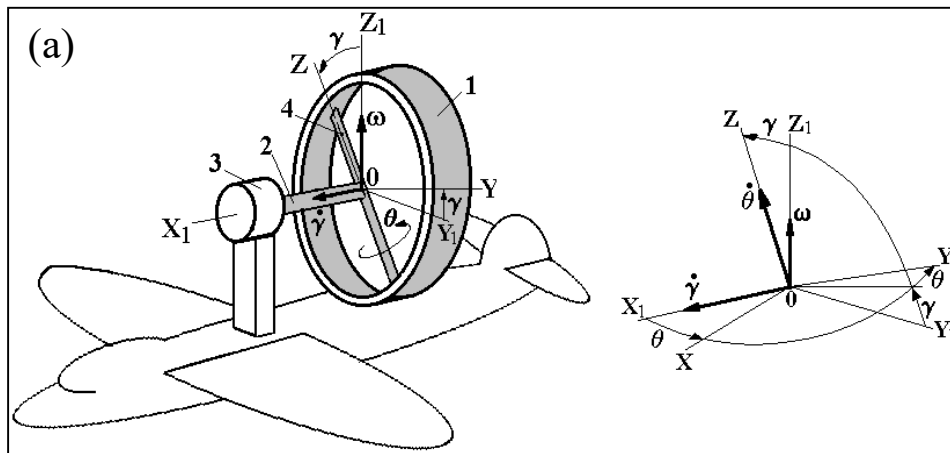


Рис.2.3. Кинематическая схема, системы координат (а) и элементы конструкции (б) роторного вибрационного ДНГ: 1 – ротор; 2 – вал двигателя; 3 – двигатель; 4 – упругие торсионы

• Построение и исследование уравнений движения (математических моделей) **ДНГ** представлено далее при решении учебно-исследовательской **задачи 2.2и**.

Ответы и решения

Практические задачи 1-го уровня сложности

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.7. Роторный вибрационный ДНГ:

момент инерции ротора относительно оси X $A = 0,00005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$;

моменты инерции ротора относительно осей Y, Z $B = C = 0,00003 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$;

угловая скорость вращения ротора $\Omega = 2000 \text{ с}^{-1}$;

Определить кинетический момент H гироскопа и, из условия динамической настройки,

$c_1 = (2B - A)\Omega^2$ необходимую жесткость торсиона на кручение c_1 .

Задача 2.8. Роторный вибрационный ДНГ:

момент инерции ротора относительно оси X $A = 0,00005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$;

моменты инерции ротора относительно осей Y, Z $B = C = 0,00003 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$;

угловая скорость вращения ротора $\Omega = 1500 \text{ с}^{-1}$;

измеряемая угловая скорость объекта $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$;

коэффициент демпфирования $f = 0,0005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Определить:

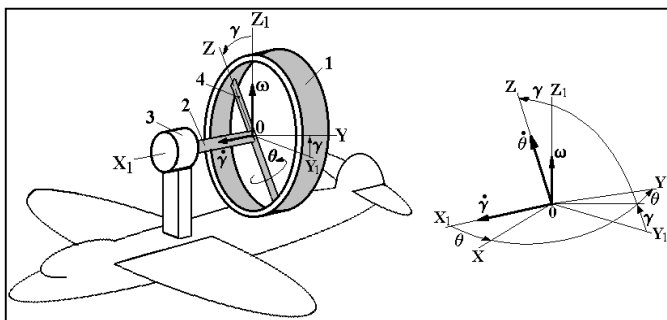
1) установившуюся амплитуду малых колебаний ротора из выражения

$$\theta_* = \frac{H_*}{\sqrt{(c_0^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \omega \sin(\Omega t - \varphi) \quad 2n = \frac{f}{B}; \quad c_0^2 = \frac{c_1 + (A - B)\Omega^2}{B}; \quad H_* = \frac{H}{B}.$$

при номинальной жесткости торсиона c_{1N} из условия $c_{1N} = (2B - A)\Omega^2$;

2) амплитуды малых колебаний ротора при жесткостях $c_1 = c_{1N} \pm 10\% c_{1N}$.

Проверить результат с помощью программы “DNG”.



Задача 2.9. ДНГ имеет параметры:

момент инерции ротора относительно оси симметрии X перпендикулярной плоскости его вращения $A=0,00005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; измеряемая угловая скорость объекта $\omega=1 \text{ с}^{-1}$; максимально допустимый угол поворота ротора $\theta=0,1$ рад. Выполнено условие динамической настройки, так что амплитуда вынужденных колебаний

$$\theta_* = (A\omega/f) \sin(\Omega t - \varphi)$$

Определить коэффициент демпфирования f .

Задача 2.10. Необходимо, с помощью роторного вибрационного ДНГ, измерить угловую скорость объекта с погрешностью $\omega \leq 0,1$ град/час. Момент инерции ротора относительно оси симметрии X перпендикулярной плоскости его вращения $A=0,00005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; угловая скорость ротора $\Omega=1500 \text{ с}^{-1}$; Найти в установившемся режиме максимально допустимый момент сил сопротивления M_c , пользуясь линеаризованным уравнением:

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + c_0^2\theta = (A\Omega/B)\omega \sin \Omega t + M_c/B$$

Задача 2.11. ДНГ – датчик угловой скорости имеет параметры:

момент инерции ротора относительно его оси симметрии X перпендикулярной плоскости его вращения $A=0,00005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; коэффициент демпфирования $f=0,0005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Линейность характеристики упругого торсиона сохраняется до угла поворота $\theta_{\max}=6^\circ$. Выполнено условие динамической настройки, так что амплитуда вынужденных колебаний

$$\theta_* = (A\omega/f) \sin(\Omega t - \varphi).$$

Определить верхнюю границу измеряемых угловых скоростей в [о/с].

Задача 2.12. Динамически настраиваемый интегрирующий гироскоп имеет параметры:

момент инерции ротора относительно его оси симметрии X перпендикулярной плоскости его вращения $A=0,00005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; момент инерции ротора относительно оси симметрии Y , лежащей в плоскости его вращения $B=0,00003 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$. Вязкое трение $f=0$. Выполнено условие динамической настройки, так что амплитуда вынужденных колебаний

$$\theta \approx -(A/2B)\omega t \cos \Omega t.$$

Определить передаточный коэффициент $\delta_{\text{ИГ}}$ интегрирующего ДНГ.

Учебно - исследовательская задача 2-го уровня сложности

Задача 2.2и. Провести аналитическое и численное исследование роторного вибрационного динамически настраиваемого гироскопа (рис.2.3).

Часть А.

1. Вывести нелинейные уравнения движения (построить математическую модель) динамически настраиваемого гироскопа на основе уравнений Лагранжа 2-го рода.

2. Получить и проанализировать линеаризованные уравнения движения ДНГ.

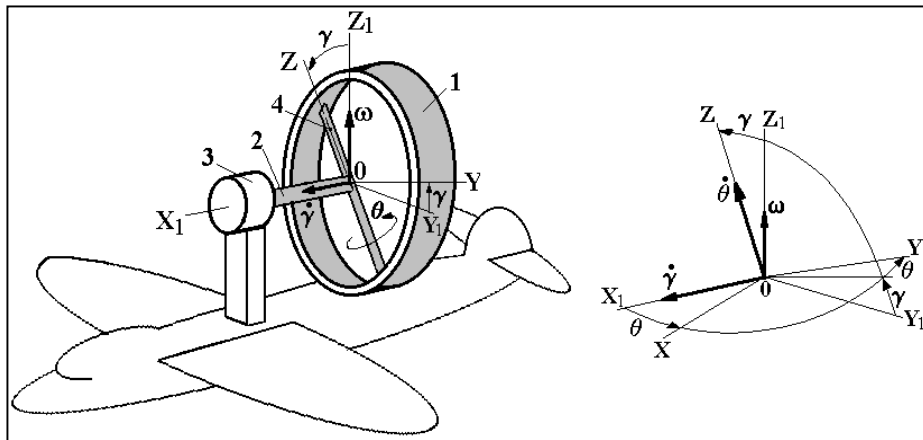
Получить и провести анализ условия динамической настройки. Выявить особенности ДНГ.

Часть Б.

Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации "DNG", подтвердить полученные аналитические результаты.

Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.2и

Часть А.



1. Исходные положения

Уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = Q_{\theta} \quad (2.7)$$

Кинетическая энергия и обобщенная сила

$$E = \frac{A}{2} (\dot{\gamma} \cos \theta + \omega \sin \gamma \sin \theta)^2 + \frac{B}{2} (\omega \sin \gamma \cos \theta - \dot{\gamma} \sin \theta)^2 + \frac{C}{2} (\dot{\theta} + \omega \cos \gamma)^2, \quad (2.8)$$

$$Q_{\theta} = -c_1 \theta - f \dot{\theta} \quad (2.9)$$

• Уравнения движения динамически настраиваемого гироскопа

$$C\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + c_1\theta + (B - A)\left(\frac{\omega^2}{2}\sin^2\gamma\sin 2\theta + \dot{\gamma}\omega\sin\gamma\cos 2\theta - \frac{\dot{\gamma}^2}{2}\sin 2\theta\right) = C\omega\dot{\gamma}\sin\gamma. \quad (2.10)$$

2. Линеаризованные уравнения, (для малых колебаний) уравнение движения ДНГ (ДУС),
с учетом $C = B$; $\cos 2\theta \approx 1$; $\sin 2\theta \approx 2\theta$; $\omega \ll \dot{\gamma}$; $H = A\dot{\gamma}$; $\gamma = \Omega t$

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + c_0^2\theta = H_*\omega\sin\Omega t \quad (2.11)$$

$$2n = \frac{f}{B}; \quad c_0^2 = \frac{c_1 + (A - B)\Omega^2}{B}; \quad H_* = \frac{H}{B}.$$

Вынужденные колебания ротора ДНГ

$$\theta_* = \frac{H_*}{\sqrt{(c_0^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \omega \sin(\Omega t - \varphi) \quad \text{tg}\varphi = \frac{2n\Omega}{c_0^2 - \Omega^2} \quad (2.12)$$

Динамическая (резонансная) настройка:

$$c_0^2 = \Omega^2 \quad \longleftrightarrow \quad c_1 = (2B - A)\Omega^2 \quad (2.13)$$

Важные особенности ДНГ

• При **динамической настройке** (2.13) амплитуда колебаний (2.12) **увеличивается** и **не зависит** от Ω :

$$\theta_* = \frac{A}{f} \omega \sin(\Omega t - \varphi) \quad (2.14)$$

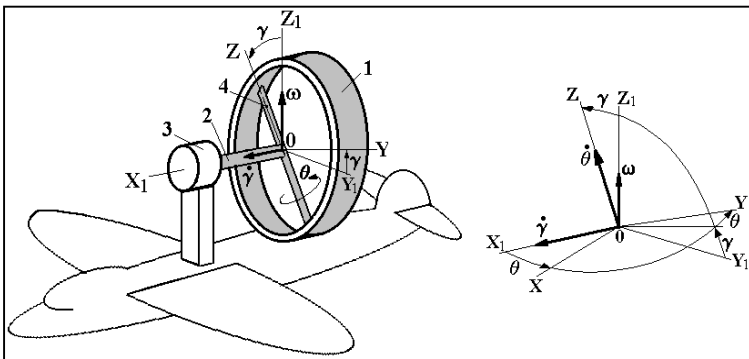
Пусть $f = 0$ и $c_0^2 = \Omega^2$

$$\text{Из (2.11)} \quad \ddot{\theta} + \Omega^2\theta = H_*\omega\sin\Omega t \quad (2.15)$$

Общее решение (2.15) при нулевых н.у. $\theta = \frac{A\omega}{2B\Omega}\sin\Omega t - \frac{A}{2B}\omega t \cos\Omega t \rightarrow$

$$\text{При } t > 1/\Omega \quad \theta \approx -\frac{A}{2B}\omega t \cos\Omega t \quad (2.16)$$

• При $f \rightarrow 0$ и выполнении **динамической настройки** (2.13), амплитуда малых колебаний пропорциональна **углу поворота** основания, т.е гироскоп становится **интегрирующим** с передаточным коэффициентом $\delta_{II} = A/(2B)$.



Задания для самостоятельной работы

Получить общее решение уравнения (2.11) вынужденных малых колебаний ротора, полагая сопротивление малым ($n < c_0$).

Показать, что вынужденные колебания определяются выражением (2.12).

Исследовать, с помощью программы динамической визуализации "DNG", влияние различных факторов на поведение роторного вибрационного динамически настраиваемого гироскопа в режимах его работы, как датчика угловой скорости или интегрирующего гироскопа. А, именно:

1. Влияние выполнения или невыполнения условия динамической настройки.

Построение зависимостей амплитуд колебаний от угловой скорости вращения ротора $Am(\Omega)$ и от измеряемой угловой скорости $Am(\omega)$ при вариациях вязкого демпфирования и выполнении (невыполнении) условия динамической настройки.

2. Влияние вязкого демпфирования от его полного отсутствия (интегрирующий гироскоп при выполнении условия динамической настройки) до конечных значений (датчик угловой скорости).

3. Влияние кинетического момента, моментов инерции и жесткости подвеса.

4. Выявление, на основе сравнения нелинейной и линеаризованной моделей, критических значений параметров гироскопа, входных воздействий и амплитуд выходных колебаний, при которых справедлива линеаризованная модель ДНГ.

