

# Практические и учебно-исследовательские задачи для микромеханических гироскопов RL, RR и LL типов

## Краткие сведения по теории

• **Микромеханические гироскопы (ММГ)** - новый класс кремниевых датчиков инерциальной информации на основе достижений микроэлектронной планарной технологии.

**Основные достоинства ММГ** – супермалые масса и габариты (доли грамм и единицы миллиметров), энергопотребление (доли ватт) и низкая стоимость.

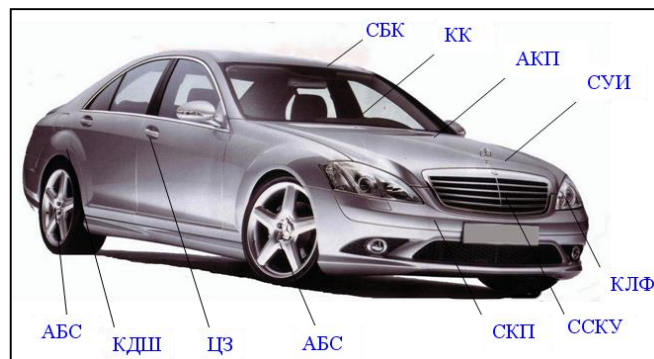
**Новые области применения:** навигация и системы контроля и управления автомобилей; стабилизации оптических устройств, роботов, игрушек; медицинская техника и др.

**Основной недостаток ММГ** сегодня – **невысокая точность** (единицы и десятки град/час).

## Перспективы развития и области применения

### Измеритель кровяного давления

- Компания: OMRON
- Изделие: Portable Blood Pressure Monitoring Device
- ADI Датчик: ADXL311JE
- Функция: измерение наклона
  - Измеряет угол предплечья для правильного положения запястья
  - Повышает точность измерения кровяного давления



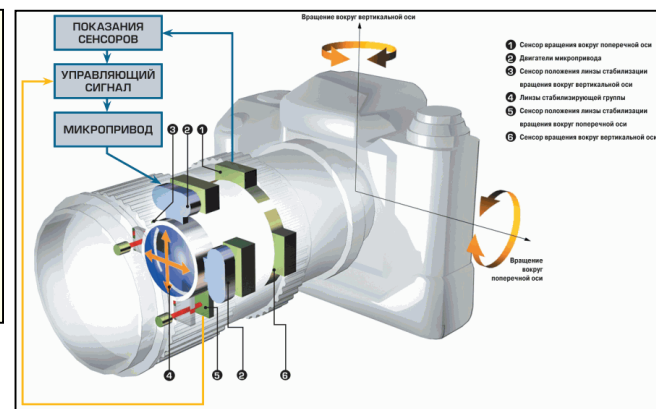
### Игры



Game Boy® Advance with Kirby Tilt-a-Tumble™ and Happy Panchu™  
Компания: Nintendo  
ADI датчик: iMEMS® ADXL202 и ADXL202E

Функция: измерение наклонов в интуитивном игровом управлении

Системы	Аббревиатура	Сенсоры
Система круиз контроля	СКК	3
Автоматическая коробка передач	АКП	9
Система блокировки крыши	СБК	7
Антиблокировочная система колес	АБС	4
Центральный замок	ЦЗ	3
Корректор луча фар	КЛФ	6
Система управления инжектором	СУИ	11
Климат контроль	КК	13
Контроль давления шин	КДШ	13
Система стабилизации курсовой устойчивости	ССКУ	14
Система контроля парковки	СКП	12



## • Камертонный микромеханический гироскоп *RL* типа

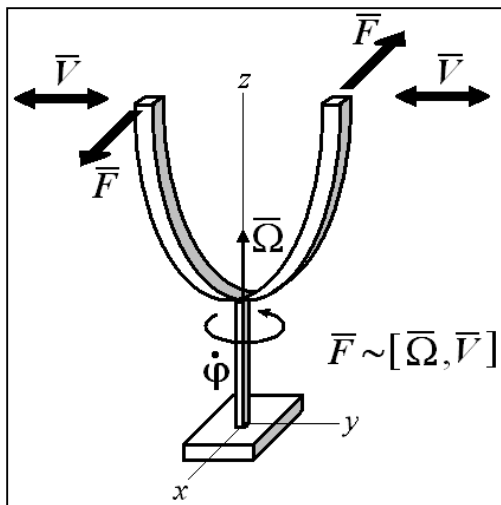


Рис.2.15. Камертон

• Если возбудить (рис.2.15) в противофазе колебания камертона  $V$  с заданной амплитудой и частотой в плоскости  $zy$ , то, при наличии угловой скорости  $\Omega$ , возникнет пара сил Кориолиса  $(F, F)$ , вызывающая колебания камертона вокруг оси  $z$ . Амплитуда этих вторичных колебаний - мера измеряемой  $\Omega$ .

• Конструкция камертонного ММГ (рис.2.16). Размеры  $2 \times 4$  мм, толщина  $\approx 20$  мкм. Чувствительные массы с помощью вибрационных приводов, создающих вынуждающие силы  $F$ , приведены в колебательные противофазные движения со скоростью  $V$ .

• **Принцип действия камертонного ММГ** - измерение амплитуд угловых колебаний рамки (угол  $\phi$ ) или поступательных колебаний чувствительных масс (координаты  $y_i$ ), вызываемых Кориолисовыми силами при наличии  $\Omega$ .

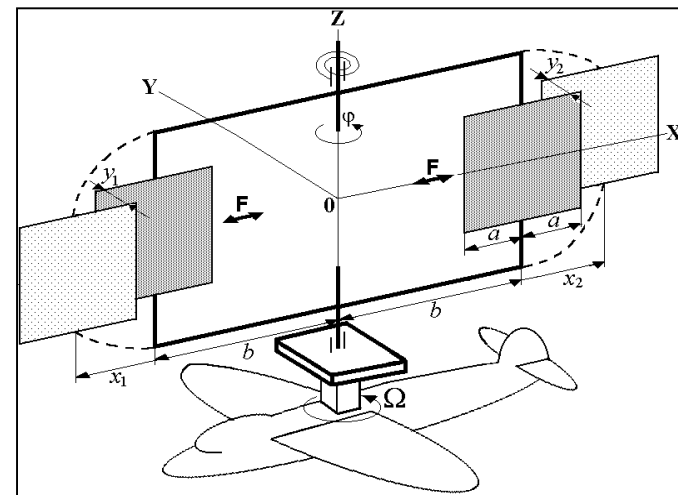
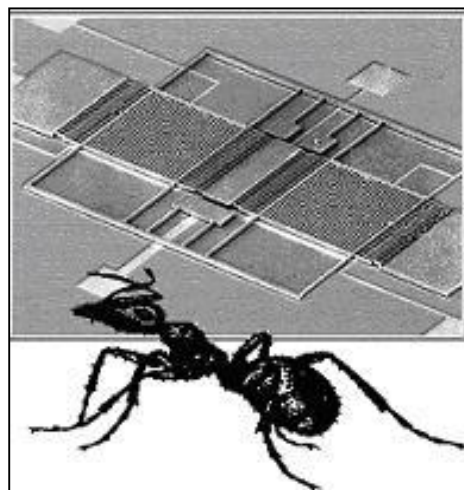
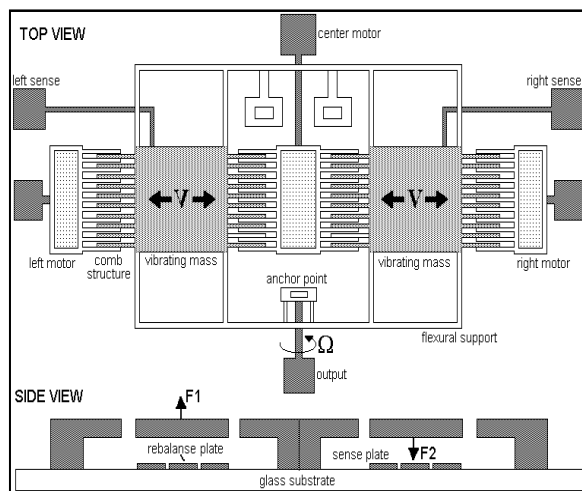


Рис.2.16. Конструкция и кинематическая схема камертонного ММГ

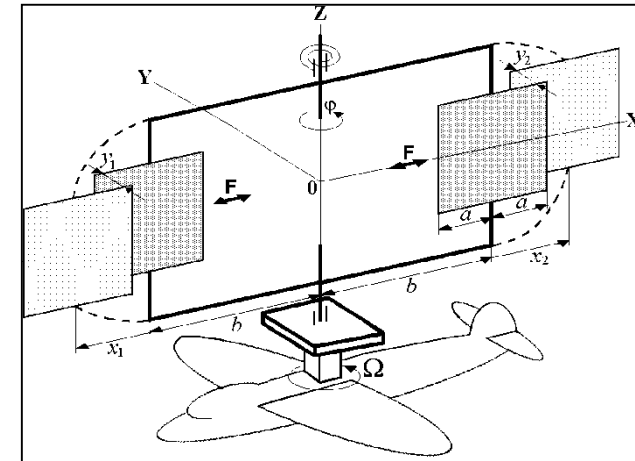
• Построение и исследование уравнений движения камертонного ММГ представлено далее при решении учебно-исследовательской задачи 2.5и.

Ответы и решения

## Практические задачи 1-го уровня сложности

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.22.** Закон вынужденных первичных колебаний ЧЭ камертонного ММГ  $x = A_x \sin pt$ , где амплитуда и частота  $A_x$ ,  $p = 2\pi \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ; массы ЧЭ  $m_1 = m_2 = m$ ; геометрический параметр рамки  $b = 1500 \text{ мкм}$ ; технологические разбалансировки ЧЭ  $y_{2T} = 0,1 \text{ мкм}$ ,  $y_{1T} = 0$ .  
**Определить**, пользуясь формулой для дрейфа (пятое слагаемое), максимальную величину угловой скорости дрейфа ММГ, обусловленного заданными разбалансировками.



$$\Omega_{dr} \approx \frac{m_2(x_{2T} + b_{2T}) - m_1(x_{1T} + b_{1T})}{2A_x p b(m_1 + m_2)} \ddot{y} + \frac{c_{\phi T}}{2A_x p b(m_1 + m_2)} \dot{\phi} + \frac{J_{zT}}{2A_x p b(m_1 + m_2)} \ddot{\phi} +$$

$$+ \frac{m_2(x_{2T} + b_{2T}) - m_1(x_{1T} + b_{1T})}{A_x p b(m_1 + m_2)} \dot{x} \dot{\phi} - \frac{m_2 y_{2T} - m_1 y_{1T}}{2A_x p b(m_1 + m_2)} \ddot{x} + \frac{m_2 y_{2T} - m_1 y_{1T}}{A_x p b(m_1 + m_2)} \dot{y} \dot{\phi},$$

**Задача 2.23.** Закон вынужденных первичных колебаний ЧЭ камертонного ММГ  $x = A_x \sin pt$ , где амплитуда и частота  $A_x = 20 \text{ мкм}$ ,  $p = 2\pi \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ; закон вторичных колебаний ЧЭ  $y = A_y \sin(pt + \delta)$ , где амплитуда и частота  $A_y = 0,06 \text{ мкм}$ ,  $p = 2\pi \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ; массы ЧЭ  $m_1 = m_2 = m$ ; геометрический параметр рамки  $b = 1500 \text{ мкм}$ ; технологические разбалансировки ЧЭ  $x_{2T} = 0,1 \text{ мкм}$ ,  $x_{1T} = 0$ ,  $b_{1T} = b_{2T} = 0$ .  
**Определить**, пользуясь формулой для дрейфа (первое слагаемое), максимальную величину угловой скорости дрейфа ММГ [ $\text{с}^{-1}$ ], обусловленного заданными разбалансировками.

# Учебно - исследовательская задача 2-го уровня сложности

**Задача 2.5и.** Провести аналитическое и численное исследование **камертонного микромеханического гироскопа** (рис.2.16).

## Часть А.

Используя приближенную математическую модель [1-3,22] провести анализ камертонного ММГ, выявить его основные особенности, получить качественную и количественную оценку технологических погрешностей.

## Часть Б.

Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации “ММГ\_kamerton”, подтвердить полученные аналитические результаты.

## Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.5и

**Часть А. Исходные положения.** Математическая модель камертонного ММГ [1-3]:

Информационное уравнение

$$J_z \ddot{\phi} + \mu_\phi \dot{\phi} + c_\phi \phi = \sum_{i=1}^2 m_i [\ddot{x}_i y_i - \ddot{y}_i x_i] - 2(\dot{\phi} + \Omega) \sum_{i=1}^2 m_i [\dot{x}_i x_i + \dot{y}_i y_i] \quad (2.41)$$

Информационные уравнения

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + \mu_{1y} \dot{y}_1 + c_{1y} y_1 &= -m_1 \ddot{\phi} x_1 - 2m_1 \dot{x}_1 (\dot{\phi} + \Omega) + m_1 y_1 (\dot{\phi} + \Omega)^2, \\ m_2 \ddot{y}_2 + \mu_{2y} \dot{y}_2 + c_{2y} y_2 &= -m_2 \ddot{\phi} x_2 - 2m_2 \dot{x}_2 (\dot{\phi} + \Omega) + m_2 y_2 (\dot{\phi} + \Omega)^2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + \mu_{1x} \dot{x}_1 + c_{1x} (x_1 + b) &= m_1 \ddot{\phi} y_1 + 2m_1 (\dot{\phi} + \Omega) \dot{y}_1 + m_1 x_1 (\dot{\phi} + \Omega)^2 + F \cos pt, \\ m_2 \ddot{x}_2 + \mu_{2x} \dot{x}_2 + c_{2x} (x_2 - b) &= m_2 \ddot{\phi} y_2 + 2m_2 (\dot{\phi} + \Omega) \dot{y}_2 + m_2 x_2 (\dot{\phi} + \Omega)^2 - F \cos pt, \end{aligned} \quad (2.43)$$

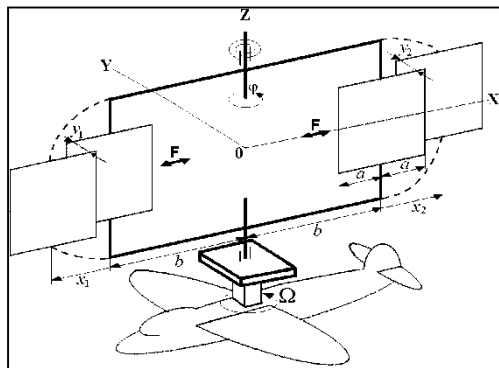
$$x_i = x_{i0} + x_{iT} + b_{iT}, \quad y_i = y_{i0} + y_{iT}, \quad c_\phi = c_{\phi 0} + c_{\phi T}, \quad J_{ci} = J_{ci0} + J_{ciT}, \quad J_3 = J_{30} + J_{3T},$$

$$J_{ci0} = m_i a^2 / 3, \quad J_{30} = m_3 b^2 / 3, \quad c_{ix} = c_{ix0} + c_{ixT}, \quad c_{iy} = c_{iy0} + c_{iT}, \quad J_z = J_{c1} + J_{c2} + J_3 + \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$m_i$  ( $i=1,2,3$ ) - массы ЧЭ и рамки;  $\Omega = \text{const}$  - измеряемая угловая скорость;  $a, b$  - геометрические параметры;

$J_{ci0}, J_{30}, J_{ciT}, J_{3T}$  - моменты инерции;  $c_{ix0}, c_{iy0}, c_{\phi 0}, \mu_{ix}, \mu_{iy}, \mu_\phi, c_{ixT}, c_{iyT}, c_{\phi T}$  - коэффициенты жесткости подвесов и демпфирования;  $F, p$  - амплитуда и частота вынуждающих сил;

$x_{iT}, y_{iT}$  - смещения ц. м. ЧЭ;  $b_{iT}$  - возмущения геометрии рамки.



## • Оценки технологического дрейфа камертонного ММГ на основе (2.1)

Запишем (2.41), по принципу Даламбера, как сумму моментов сил для ММГ на *неподвижном* основании ( $\Omega=0$ ) и *наличии* технологических погрешностей (“ $T$ ” $\neq 0$ ) и сумму моментов для ММГ на *подвижном* основании ( $\Omega = \text{const} \neq 0$ ), и *отсутствии* технологических погрешностей (“ $T$ ” $=0$ ).

Приравнивая полученные выражения и разрешая их относительно  $\Omega$ , получим приближенную оценку угловой скорости технологического дрейфа **камертонного ММГ** (рис.2.17):

$$\Omega_{\text{dr}} \approx \frac{m_2(x_{2T} + b_{2T}) - m_1(x_{1T} + b_{1T})}{2A_x pb(m_1 + m_2)} \ddot{y} + \frac{c_{\varphi} T}{2A_x pb(m_1 + m_2)} \varphi + \frac{J_{zT}}{2A_x pb(m_1 + m_2)} \ddot{\varphi} +$$

$$+ \frac{m_2(x_{2T} + b_{2T}) - m_1(x_{1T} + b_{1T})}{A_x pb(m_1 + m_2)} \dot{x}\dot{\varphi} - \frac{m_2 y_{2T} - m_1 y_{1T}}{2A_x pb(m_1 + m_2)} \ddot{x} + \frac{m_2 y_{2T} - m_1 y_{1T}}{A_x pb(m_1 + m_2)} \dot{y}\dot{\varphi}, \quad (2.44)$$

$A_x$  - заданная амплитуда вынужденных колебаний по  $x$

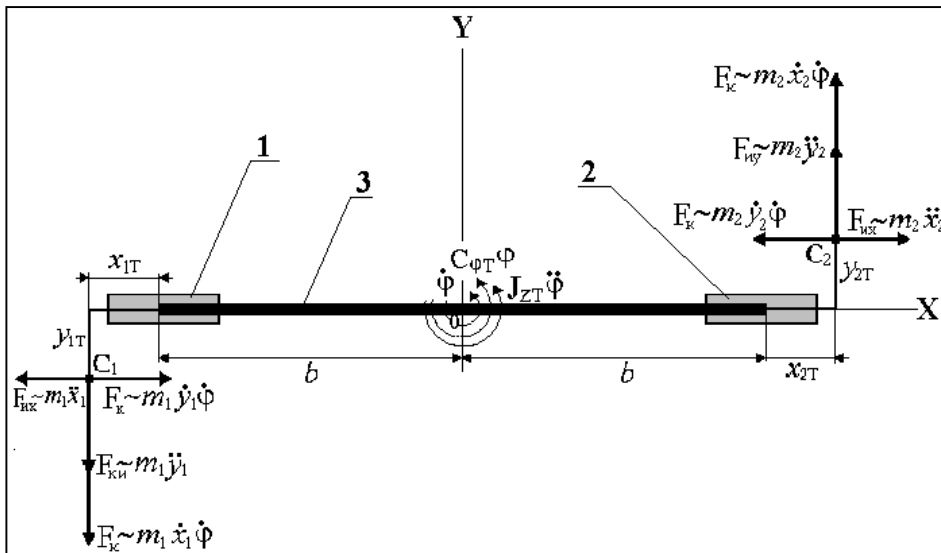


Рис. 2.17. Дополнительные силы и моменты, действующие на камертонный ММГ:  
1,2 – чувствительные элементы; 3 – рамка

## Качественный анализ (2.44)

• Наличие даже незначительных технологических разбалансировок  $\Delta y_T$  приводит к значительному дрейфу ММГ.

Причем, этот дрейф не зависит от измеряемой угловой скорости, а определяется только силами инерции  $m\ddot{x}$ , обусловленными внешним возбуждением колебаний.

Дело в том, что пятое слагаемое в (2.44) не зависит от углового движения по  $\varphi$  гироскопа, а определяется заданным инерционным членом (при разбалансировках  $\Delta y_T$  в плоскости XOY).



- **Количественная оценка технологического дрейфа камертонного ММГ**

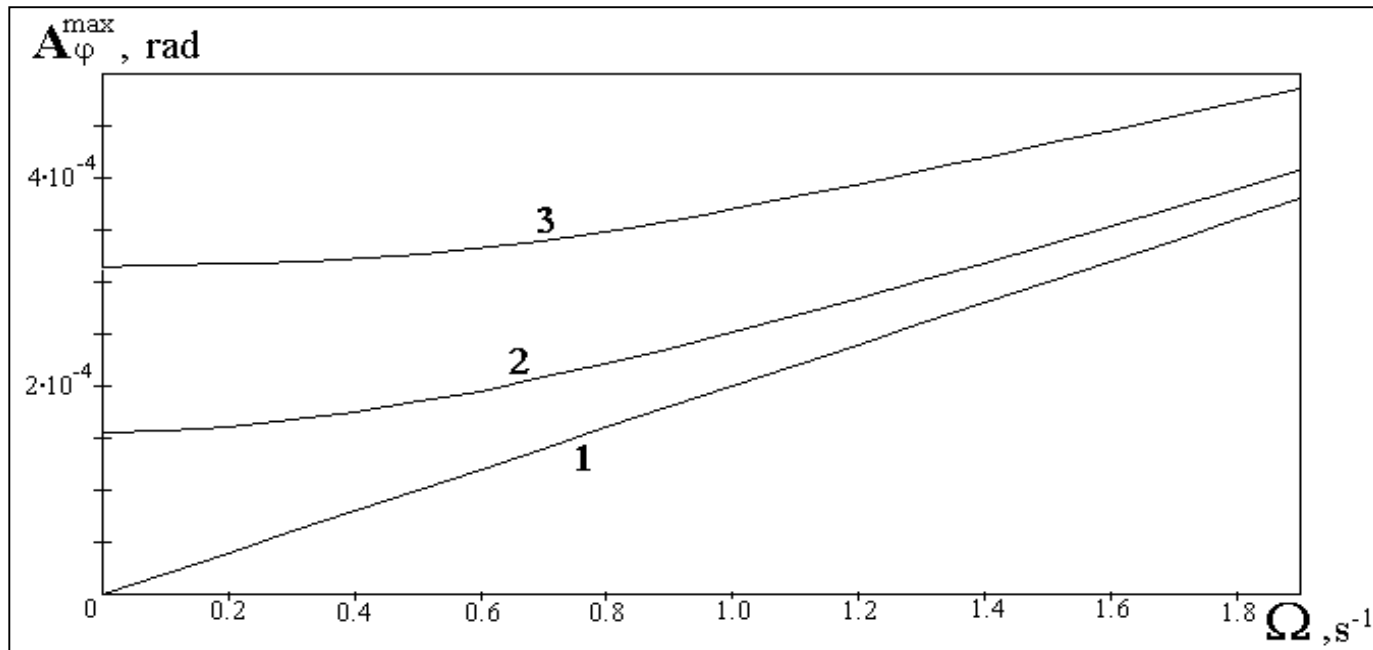


Рис.2.19. Зависимости амплитуд угловых колебаний рамки камертонного ММГ от измеряемой угловой скорости при разбалансировках в плоскости  $XOY$ : 1–  $\Delta y_T=0$ ; 2–  $\Delta y_T=0,1\text{мм}$ ; 3–  $\Delta y_T=0,2\text{мм}$

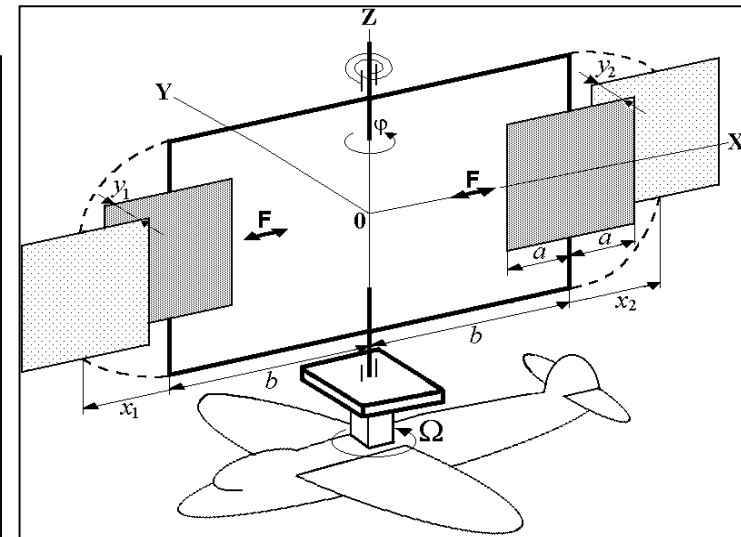
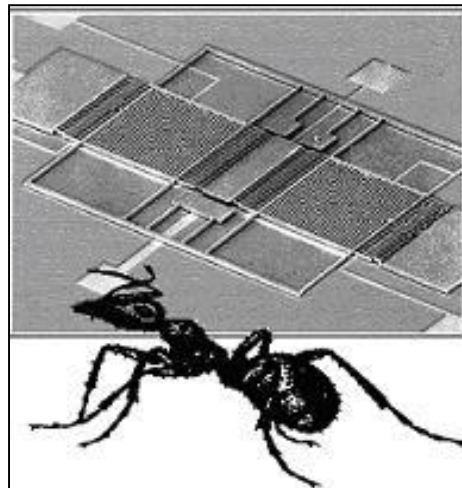
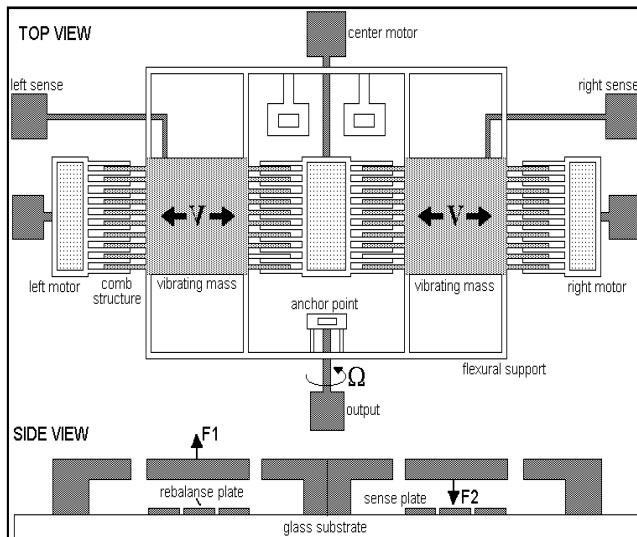
- Видна эволюция закона  $A_\phi(\Omega)$  от пропорционального, при  $\Delta y_T=0$  до нелинейного, при  $\Delta y_T \neq 0$ .
- Сравним, например, кривую 2 и пропорциональную зависимость 1.  
При отсутствии измеряемой  $\Omega = 0$  угловой скорости и при  $\Delta y_T = 0,1\text{мм}$  имеют место вторичные угловые колебания рамки с амплитудой  $A_\phi \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$  рад. Это значение амплитуды соответствует измеряемой угловой скорости  $\Omega \approx 1\text{с}^{-1}$  при  $\Delta y_T=0$  (зависимость 1 на рис.2.19).
- Таким образом, угловую скорость  $\Omega \approx 1\text{с}^{-1}$  можно считать угловой скоростью дрейфа камертонного ММГ, обусловленной разбалансировкой  $\Delta y_T = 0,1\text{мм}$ .  
Оценка дрейфа по формуле (2.44) дает такие же результаты.

## Задания для самостоятельной работы

Исследовать, с помощью программы динамической визуализации “**MMG\_kamerton**”, влияние различных факторов и параметров на поведение камертонного микромеханического гироскопа.

А, именно:

1. Влияние геометрических характеристик рамки и ЧЭ.
2. Влияние вязкого демпфирования по каналам  $y_i$ ,  $\varphi$  вторичных колебаний от его полного отсутствия до конечных значений.
3. Влияние масс рамки и ЧЭ.
4. Влияние жесткости подвеса ЧЭ по каналу  $x_i$  первичных колебаний
5. Влияние амплитуды и частоты вынужденных первичных колебаний.
6. Влияние сочетаний технологического разброса параметров камертонного ММГ (разбалансировки, технологические возмущения геометрии рамки и ЧЭ) на выходные характеристики гироскопа и его дрейф.
7. Влияние вариаций значений измеряемой угловой скорости.



## • Микромеханический гироскоп *RR* типа с кардановым подвесом ЧЭ

- Конструкция осциллятора содержит массивный инерционный элемент 1 в кардановом подвесе (рис.2.20).
- Наружная рамка 2 совершает вынужденные колебания с заданной амплитудой и частотой.

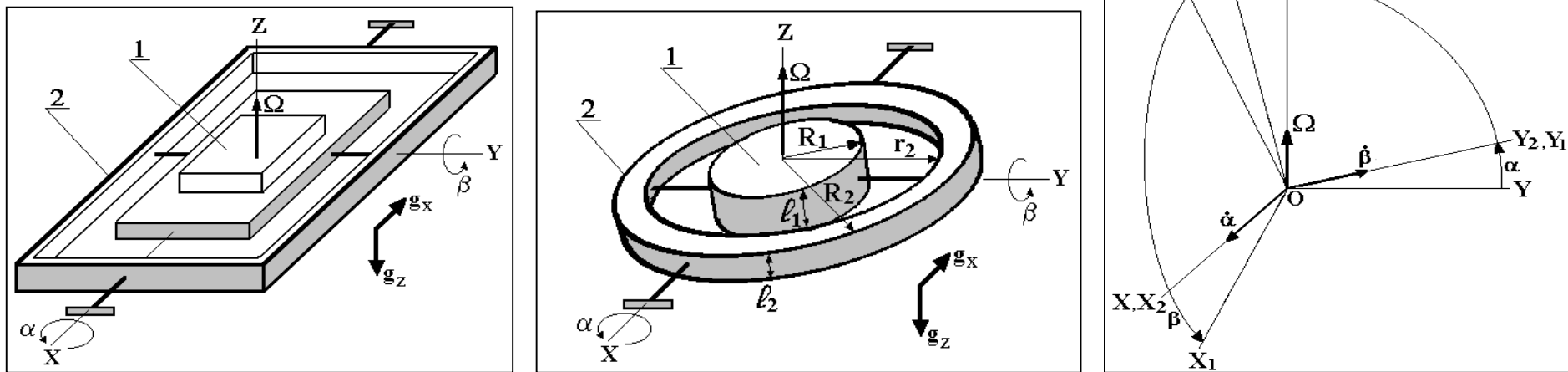


Рис.2.20. Конструктивные схемы ММГ прямоугольного и кольцевого исполнения с кардановым подвесом ЧЭ и системы координат: 1 - инерционный чувствительный элемент; 2 - наружная рамка

- **Принцип действия карданового ММГ** основан на измерении амплитуд угловых колебаний внутренней рамки вместе с инерционным элементом 1.

Эти колебания вызываются Кориолисовыми силами инерции, обусловленными вынужденными колебаниями наружной рамки 2 и вращением основания прибора относительно его оси чувствительности с измеряемой угловой скоростью  $\Omega$ .



# Учебно - исследовательская задача 2-го уровня сложности

**Задача 2.6и.** Провести аналитическое и численное исследование **карданового микромеханического гироскопа** (рис.2.20).

## Часть А.

Используя приближенную математическую модель [1-3] провести анализ карданового ММГ, выявить его основные особенности, получить качественную и количественную оценку технологических погрешностей.

## Часть Б.

Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации “ММГ\_kard”, подтвердить полученные аналитические результаты.

## Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.6и

**Часть А. Исходные положения.** Математическая модель карданового ММГ [1-3]:

Информационное уравнение

$$\ddot{\beta} + 2n_1\dot{\beta} + \omega_\beta^2\beta + b_1\dot{\alpha} = b_0 \quad (2.45)$$

$$\ddot{\alpha} + 2n_2\dot{\alpha} + \omega_\alpha^2\alpha - a_1\dot{\beta} = M_0 \cos pt \quad (2.46)$$

$$2n_1 = \mu_\beta / B_1, \quad 2n_2 = \mu_\alpha / (A_1 + A_2),$$

$$\omega_\beta^2 = [c_\beta - (A_1 - C_1)\Omega^2 - z_T m_1 g_z - x_T m_1 g_x] / B_1,$$

$$\omega_\alpha^2 = [c_\alpha - (B_1 + B_2 - C_1 - C_2)\Omega^2] / (A_1 + A_2),$$

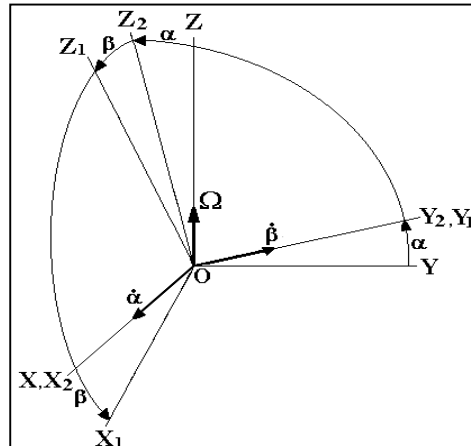
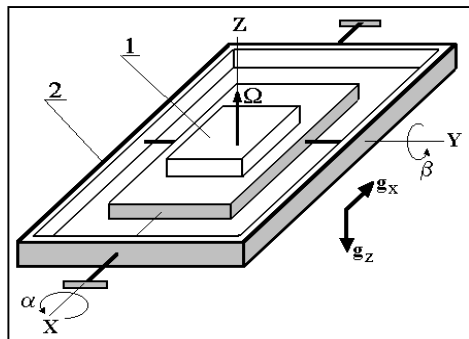
$$b_1 = (A_1 + B_1 - C_1)\Omega / B_1, \quad a_1 = (A_1 + B_1 - C_1)\Omega / (A_1 + A_2),$$

$$b_0 = m_1(x_T g_z - z_T g_x) / B_1, \quad M_0 = L_0 / (A_1 + A_2).$$

$$A_i = A_{i0} + A_{iT} \quad B_i = B_{i0} + B_{iT} \quad C_i = C_{i0} + C_{iT}$$

$$c_\alpha = c_{\alpha 0} + c_{\alpha T} \quad c_\beta = c_{\beta 0} + c_{\beta T}$$

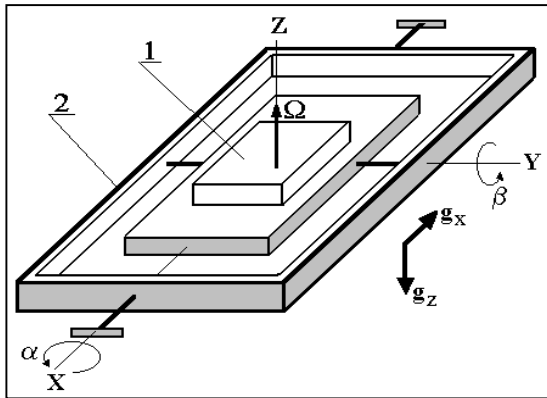
$$\mu_\alpha = \mu_{\alpha 0} + \mu_{\alpha T} \quad \mu_\beta = \mu_{\beta 0} + \mu_{\beta T}$$



- **Номинальные моменты инерции, собственные частоты** и другие параметры **карданового ММГ** для обеспечения его **эффективного функционирования**

$$A_{10} - C_{10} \rightarrow \min, \quad A_{10} + B_{10} - C_{10} \rightarrow \max, \quad B_{10} + B_{20} - C_{10} - C_{20} \rightarrow \min, \quad (2.47)$$

$$c_{\alpha 0} / (A_{10} + A_{20}) = k_{\alpha}^2 = p^2, \quad c_{\beta 0} / B_{10} = k_{\beta}^2 = p^2$$



Условия (2.47) выполняются, если моменты инерции для ЧЭ и рамки (утолщение в центре ЧЭ)

$$A_{10} = B_{10} = C_{10}, \quad A_{20} = B_{20} = C_{20}$$

- Выполнение ЧЭ в виде круглой пластинки, а выполнение наружной рамки в виде кольца.

Моменты инерции:

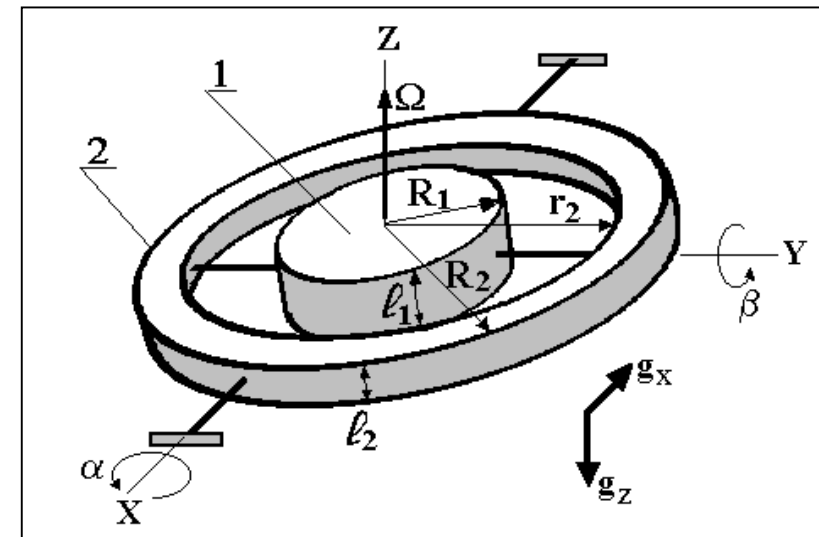
$$A_{10} = B_{10} = m_1 R_1^2 / 4 + m_1 \ell_1^2 / 12$$

$$A_{20} = B_{20} = m_2 (R_2^2 + r_2^2) / 4 + m_2 \ell_2^2 / 12$$

$$C_{10} = m_1 R_1^2 / 2 \quad C_{20} = m_2 (R_2^2 + r_2^2) / 12$$

- С учетом (2.47), соотношения для **оптимальных** геометрических параметров **кольцевого ММГ с кардановым** подвесом ЧЭ:

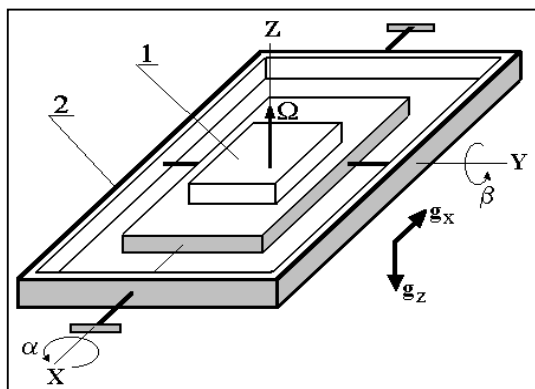
$$R_1 = \ell_1 / \sqrt{3}, \quad R_2^2 + r_2^2 = 2\ell_2^2, \quad \ell_1 \rightarrow \max$$



## • Оценки технологического дрейфа карданового ММГ на основе (2.5)

Приближенная формула для угловой скорости технологического дрейфа ММГ с кардановым подвесом ЧЭ определяется на основании информационного уравнения (2.45), как это было сделано в **задаче 2.5и** для **камертонного ММГ**:

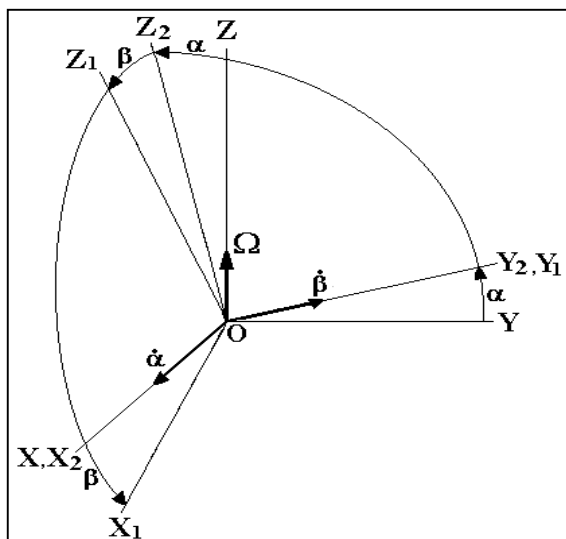
$$\Omega_{dr} \approx \frac{B_{1T}}{A_{10}Ep} \ddot{\beta} + \frac{\mu_{\beta T}}{A_{10}Ep} \dot{\beta} + \frac{c_{\beta T}}{A_{10}Ep} \beta - \frac{m_1(z_T g_z + x_T g_x)}{A_{10}Ep} \beta - \frac{m_1(x_T g_z - z_T g_x)}{A_{10}Ep} \beta \quad (2.48)$$



$E$  - заданная амплитуда возбуждаемых колебаний наружной рамки

### Качественный анализ (2.48)

- Первые четыре слагаемые в (2.48) определяют составляющие дрейфа, зависящие от измеряемой угловой скорости.
- Последнее слагаемое определяет составляющую дрейфа, не зависящую от измеряемой угловой скорости, а определяемую смещением центра масс инерционного ЧЭ и зависящую от его геометрических параметров, амплитуды и частоты вынужденных колебаний;
- Влияние температурных (или технологических) изменений момента инерции представляется одним из наиболее существенных среди первых четырех слагаемых, поскольку  $\ddot{\beta} \sim p^2$ .

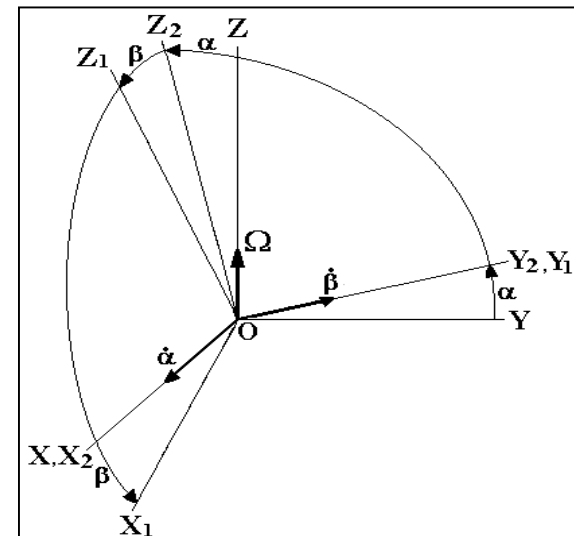
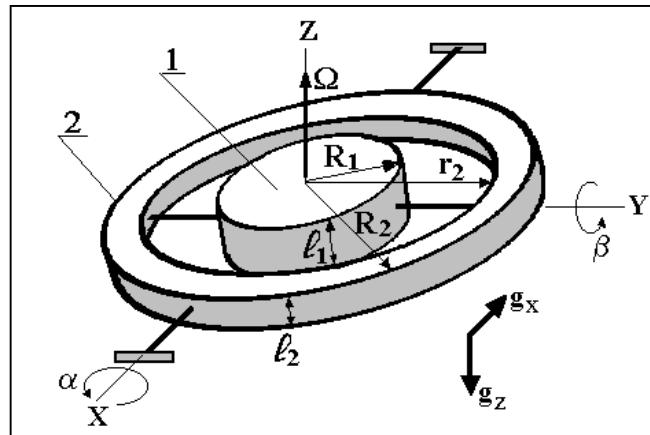
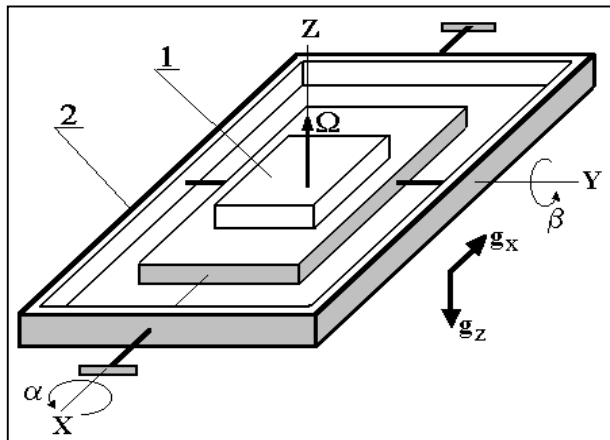


## Задания для самостоятельной работы

Исследовать, с помощью программы динамической визуализации “MMG\_kard”, влияние различных факторов и параметров на поведение карданового микромеханического гироскопа.

А, именно:

1. Влияние массовых характеристик ЧЭ.
2. Влияние вязкого демпфирования по каналу  $\beta$  вторичных колебаний от его полного отсутствия до конечных значений.
4. Влияние жесткости подвеса ЧЭ по каналам первичных и вторичных колебаний.
5. Влияние амплитуды и частоты вынужденных первичных колебаний.
6. Влияние сочетаний технологического разброса параметров карданового ММГ (разбалансировки, технологические возмущения жесткости и моментов инерции рамки и ЧЭ) на выходные характеристики гироскопа и его дрейф.
7. Влияние вариаций значений измеряемой угловой скорости.



## • Роторный микромеханический гироскоп *RR* типа

• Осциллятор содержит упруго связанный с основанием ротор, в котором моментом  $M_B$  гребенчатого двигателя возбуждаются колебания заданной амплитуды на резонансной частоте (рис.2.22). Емкостная система измерений регистрирует выходные колебания ротора, пропорциональные угловой скорости основания  $\Omega$ .

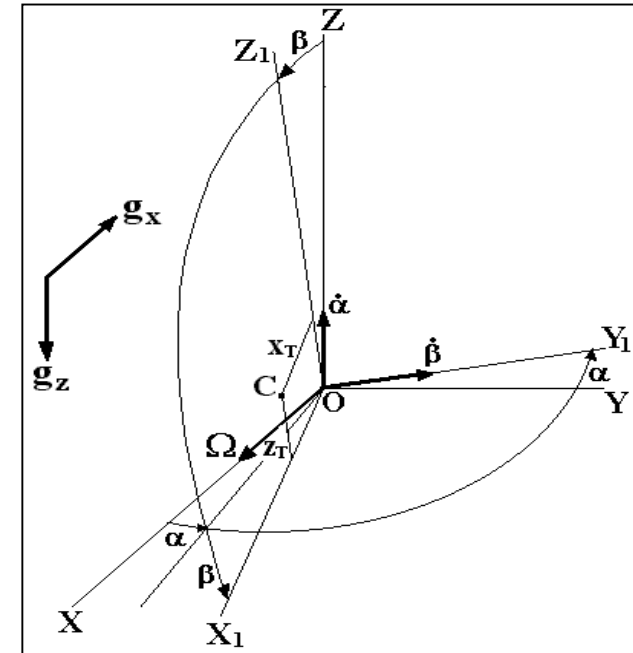
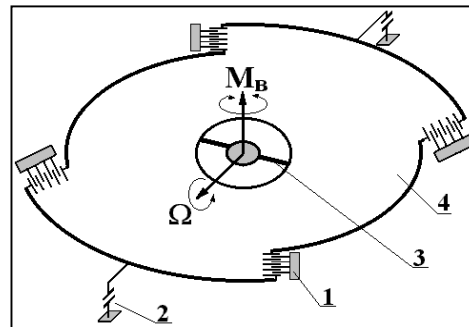
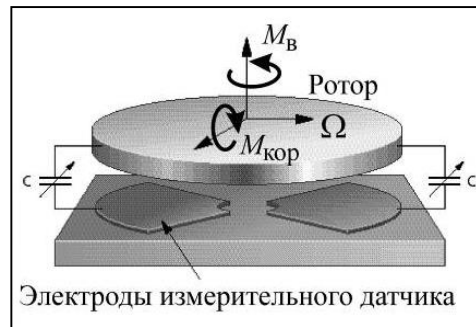
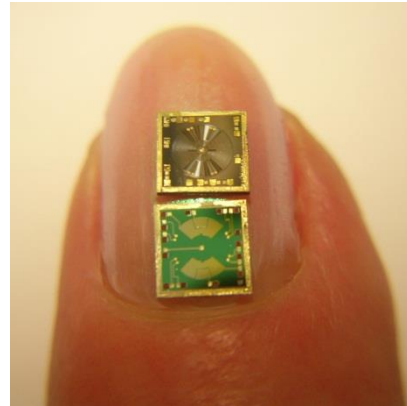
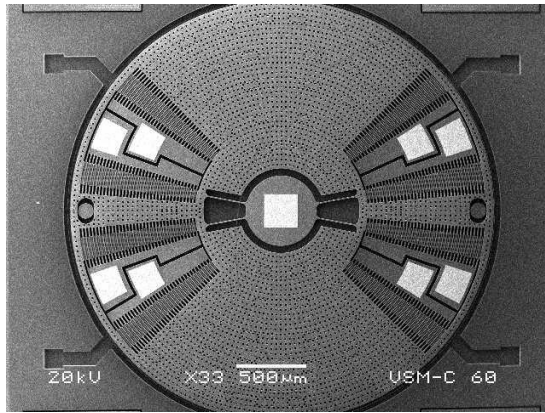


Рис.2.22. Общий вид, кинематические схемы и системы координат роторных ММГ:  
1 – вибропривод; 2 – датчик съема сигнала; 3- упругие элементы; 4 – ротор; 5 – рамка с ЧЭ

• **Принцип действия роторного ММГ** основан на измерении амплитуд угловых колебаний ротора по углу  $\beta$ . Эти колебания вызываются Кориолисовыми силами инерции, обусловленными наличием переносной угловой скорости  $\Omega$  основания и вынужденными колебаниями ротора, которые создаются моментом  $M_B$  гребенчатого двигателя.



• Построение и исследование уравнений движения роторного ММГ представлено далее при решении учебно-исследовательской **задачи 2.7и**.

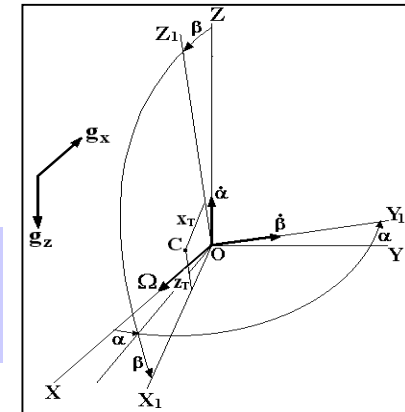
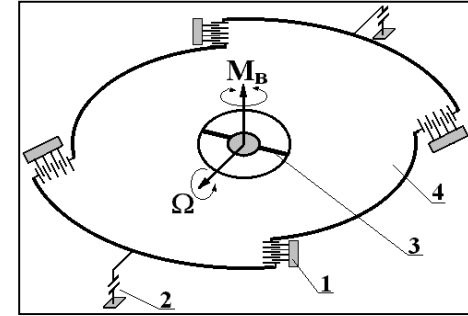
Ответы и решения

## Практические задачи 1-го уровня сложности

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.26.** Амплитуда  $E = 0,04363$  рад и частота  $p = \pi \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$  вынужденных первичных колебаний ЧЭ роторного ММГ; масса ЧЭ  $m = 10^{-8}$  кг; момент инерции ЧЭ  $A_{10} = 0,005 \cdot 10^{-12} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ; технологические или температурные разбалансировки ЧЭ  $x_T = 0,1$  мкм;  $z_T = 0$ ;  $g_z \approx 10 \text{ м/с}^2$ ;  $g_x = 0$ .

**Определить**, пользуясь формулой для дрейфа, величину составляющей (пятое слагаемое) угловой скорости дрейфа роторного ММГ, обусловленного заданными разбалансировками.



$$\Omega_{dr} \approx -\frac{B_{1T}}{A_{10} E p} \ddot{\beta} - \frac{\mu_{\beta T}}{A_{10} E p} \dot{\beta} - \frac{c_{\beta T}}{A_{10} E p} \beta + \frac{m(z_T g_z + x_T g_x)}{A_{10} E p} \beta + \frac{m(x_T g_z - z_T g_x)}{A_{10} E p},$$

**Задача 2.27.** Закон вынужденных первичных колебаний ЧЭ карданового ММГ  $\alpha = E \sin pt$ , где амплитуда и частота  $E = 0,04363$  рад,  $p = \pi \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ;

закон вторичных колебаний ЧЭ  $\beta = A_\beta \sin(pt + \delta)$ , где амплитуда  $A_\beta = 0,0001$  рад.

Номинальные значения моментов инерции ЧЭ  $A_{10} = B_{10} = 0,005 \cdot 10^{-12} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;

вследствие технологических неточностей изготовления момент инерции  $B_1$  на 1% отличается от номинального значения, т.е.  $B_{1T}/B_{10} = 0,01$ .

**Определить**, пользуясь формулой для дрейфа (первое слагаемое), максимальную величину угловой скорости дрейфа роторного ММГ, обусловленного заданным технологическим отклонением момента инерции  $B_1$ .

# Учебно - исследовательская задача 2-го уровня сложности

**Задача 2.7и.** Провести аналитическое и численное исследование **роторного микромеханического гироскопа** (рис.2.22).

## Часть А.

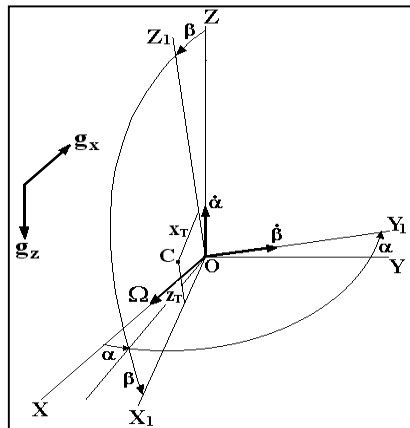
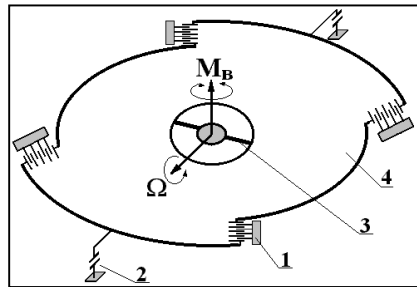
Используя приближенную математическую модель [1-3] провести анализ роторного ММГ, выявить его основные особенности, получить качественную и количественную оценку технологических погрешностей.

## Часть Б.

Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации “ММГ\_rotor”, подтвердить полученные аналитические результаты.

## Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.7и

**Часть А. Исходные положения.** Математическая модель роторного ММГ [1-3]:



$$\ddot{\beta} + 2n_1\dot{\beta} + \omega_\beta^2\beta + b_1\dot{\alpha} = b_0, \quad (2.49)$$

$$\ddot{\alpha} + 2n_2\dot{\alpha} + \omega_\alpha^2\alpha - a_1\dot{\beta} = M_0 \cos pt, \quad (2.50)$$

$$2n_1 = \mu_\beta / B_1, \quad 2n_2 = \mu_\alpha / C_1, \quad b_1 = (A_1 - B_1 - C_1)\Omega / B_1, \quad b_0 = m(x_T g_z - z_T g_x) / B_1,$$

$$\omega_\beta^2 = [c_\beta + (A_1 - C_1)\Omega^2 - z_T m g_z - x_T m g_x] / B_1,$$

$$\omega_\alpha^2 = [c_\alpha + (A_1 - B_1)\Omega^2] / C_1,$$

$$a_1 = (A_1 - B_1 - C_1)\Omega / C_1, \quad M_0 = L_0 / C_1$$

$$A_1 = A_{10} + A_{1T}, \quad B_1 = B_{10} + B_{1T}, \quad C_1 = C_{10} + C_{1T},$$

$$c_\alpha = c_{\alpha 0} + c_{\alpha T}, \quad c_\beta = c_{\beta 0} + c_{\beta T}, \quad \mu_\alpha = \mu_{\alpha 0} + \mu_{\alpha T}, \quad \mu_\beta = \mu_{\beta 0} + \mu_{\beta T},$$

## • Оценки технологического дрейфа роторного ММГ на основе (2.9)

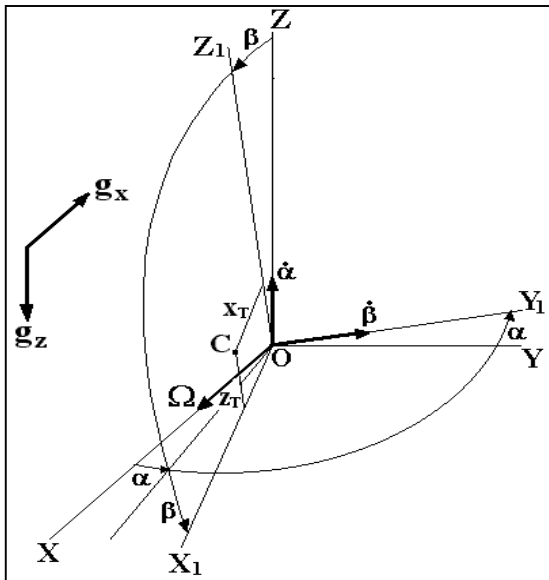
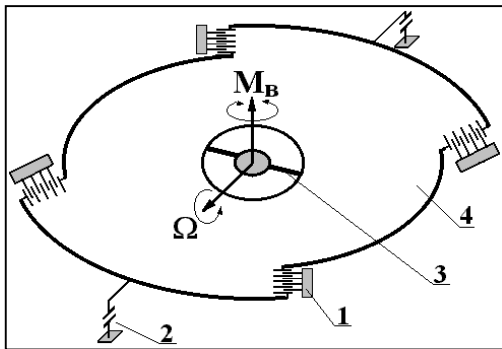
Приближенная формула для угловой скорости технологического дрейфа роторного ММГ определяется на основании информационного уравнения (2.49), как это было сделано в **задаче 2.5и** для **камертонного ММГ**:

$$\Omega_{dr} \approx -\frac{B_{1T}}{A_{10}Ep} \ddot{\beta} - \frac{\mu_{\beta T}}{A_{10}Ep} \dot{\beta} - \frac{c_{\beta T}}{A_{10}Ep} \beta + \frac{m(z_T g_z + x_T g_x)}{A_{10}Ep} \beta + \frac{m(x_T g_z - z_T g_x)}{A_{10}Ep}, \quad (2.51)$$

$E$  - заданная амплитуда возбуждаемых колебаний

### Качественный анализ (2.51)

- Первые четыре слагаемые в (2.51) определяют составляющие дрейфа, зависящие от измеряемой угловой скорости.
- Последнее слагаемое определяет составляющую дрейфа, не зависящую от измеряемой угловой скорости, а определяемую смещением центра масс роторного ЧЭ и зависящую от его геометрических параметров, амплитуды и частоты вынужденных колебаний;
- Влияние температурных (или технологических) изменений момента инерции представляется одним из наиболее существенных среди первых четырех слагаемых, поскольку  $\ddot{\beta} \sim p^2$ .

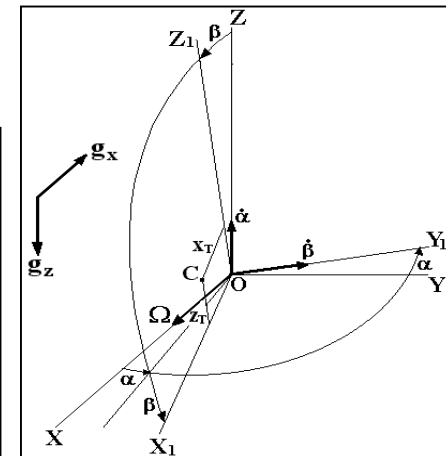
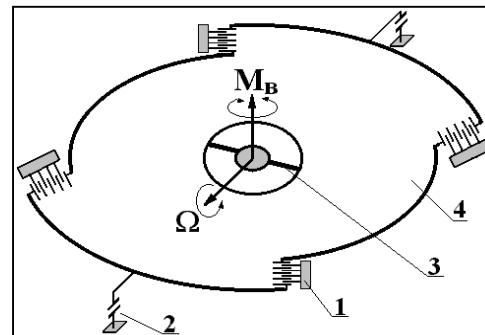
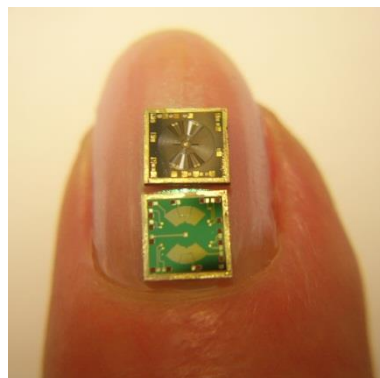
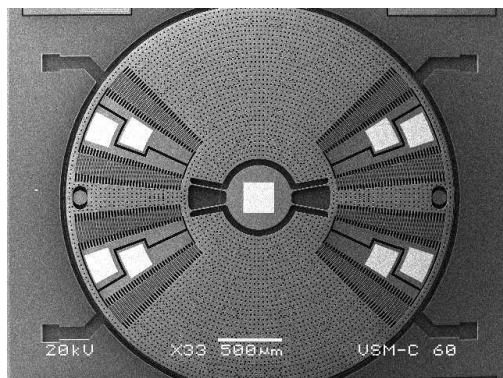


## Задания для самостоятельной работы

Исследовать, с помощью программы динамической визуализации “**MMG\_rotor**”, влияние различных факторов и параметров на поведение роторного микромеханического гироскопа.

А, именно:

1. Влияние массовых характеристик ЧЭ.
2. Влияние вязкого демпфирования по каналу  $\beta$  вторичных колебаний от его полного отсутствия до конечных значений.
4. Влияние жесткости подвеса ротора по каналам первичных и вторичных колебаний.
5. Влияние амплитуды и частоты вынужденных первичных колебаний.
6. Влияние сочетаний технологического разброса параметров роторного ММГ (разбалансировки, технологические возмущения жесткости и моментов инерции рамки и ЧЭ) на выходные характеристики гироскопа и его дрейф.
7. Влияние вариаций значений измеряемой угловой скорости.



## • Планарный микромеханический гироскоп *LL* типа

- Осциллятор содержит рамку 2, прикрепленную к основанию 6 упругими элементами 5 (рис.2.24).
- Внутри рамки 2 находится ЧЭ 1 (инерционная масса), соединенный с рамкой 2 упругими элементами 4.
- Вынужденные, с заданной амплитудой и частотой, колебания рамки 2 вместе с ЧЭ 1 возбуждаются двигателем 3.

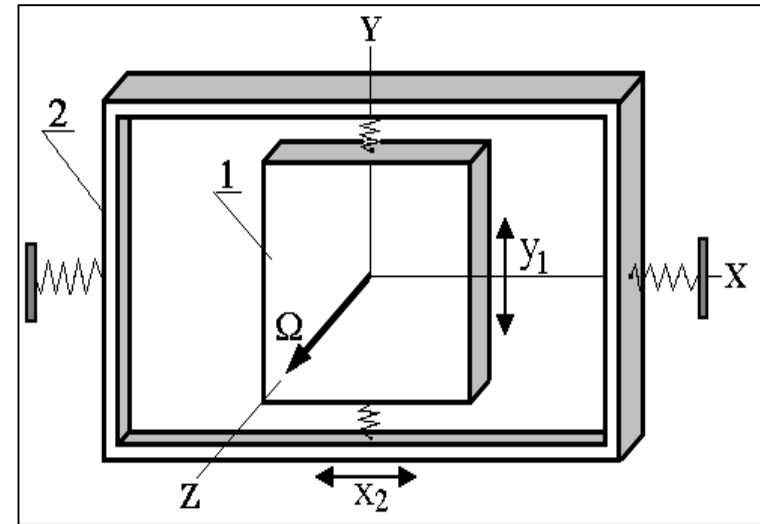
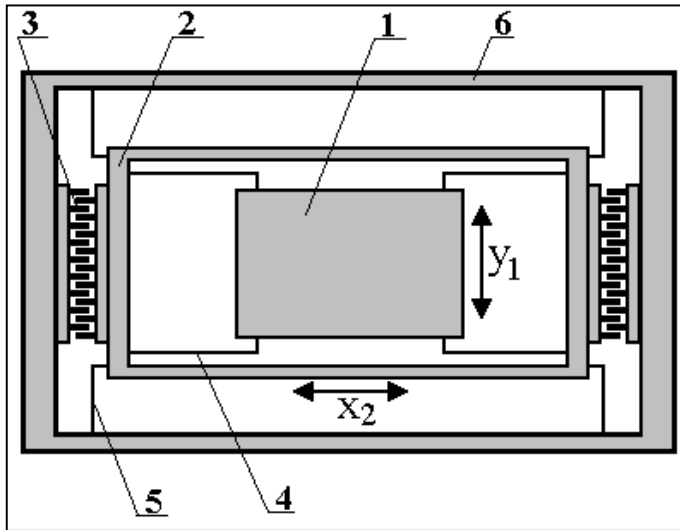


Рис.2.24. Конструктивная и кинематическая схема планарного ММГ:

1 – инерционный ЧЭ; 2 - рамка; 3 - гребенчатая структура двигателя системы возбуждения вынужденных колебаний рамки; 4,5 - упругие элементы; 6 – основание осциллятора

- **Принцип действия планарного гироскопа** основан на том, что при вращении основания вокруг оси  $Z$ , перпендикулярной плоскости ММГ, Кориолисовы силы вызывают колебания ЧЭ в направлении  $Y$ . Эти колебания регистрируются емкостными датчиками и служат мерой входной угловой скорости  $\Omega$ .



• Построение и исследование уравнений движения **планарного ММГ** представлено далее при решении учебно-исследовательской **задачи 2.8и**.

## Ответы и решения

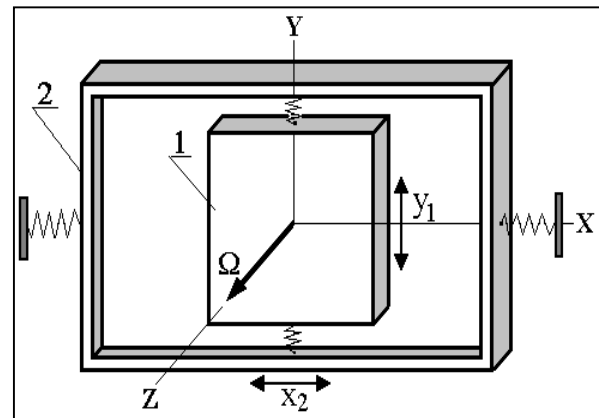
## Практические задачи 1-го уровня сложности

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.28.** Закон вынужденных первичных колебаний рамки и ЧЭ планарного ММГ  $x = A_x \sin pt$ , где амплитуда  $A_x = 20$  мкм и частота  $p = 2\pi \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>; закон вторичных колебаний ЧЭ  $y = A_y \sin(pt + \delta)$ , где амплитуда  $A_y = 0,04$  мкм.

Вследствие технологических неточностей изготовления масса  $m_1$  ЧЭ на 1% отличается от номинального значения, т.е.  $m_{1T}/m_{10} = 0,01$ .

**Определить**, пользуясь формулой для дрейфа (первое слагаемое), максимальную величину угловой скорости дрейфа планарного ММГ, обусловленного заданным технологическим отклонением массы  $m_1$ .



$$\Omega_{dr} \approx \frac{m_{1T}}{2m_{10}A_x p} \ddot{y}_1 + \frac{\mu_{1T}}{2m_{10}A_x p} \dot{y}_1 + \frac{c_{1T}}{2m_{10}A_x p} y_1,$$

**Задача 2.29.** Закон вынужденных первичных колебаний рамки и ЧЭ планарного ММГ  $x = A_x \sin pt$ , где амплитуда  $A_x = 20$  мкм и частота  $p = 2\pi \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>; закон вторичных колебаний ЧЭ  $y = A_y \sin(pt + \delta)$ , где амплитуда  $A_y = 0,04$  мкм. Масса ЧЭ  $m_{10} = 10^{-8}$  кг.

Номинальное значение коэффициента демпфирования ЧЭ  $\mu_{10} = 10^{-5}$  Н·с/м.

Вследствие технологических или температурных факторов коэффициент демпфирования на 1% отличается от номинального значения, т.е.  $\mu_{1T}/\mu_{10} = 0,01$ .

**Определить**, пользуясь формулой для дрейфа (второе слагаемое), максимальную величину угловой скорости дрейфа планарного ММГ, обусловленного заданным отклонением коэффициента демпфирования.

## Учебно - исследовательская задача 2-го уровня сложности

**Задача 2.8и.** Провести аналитическое и численное исследование **планарного микромеханического гироскопа** (рис.2.24).

### Часть А.

Используя математическую модель [1-3] провести анализ планарного ММГ, выявить его основные особенности, получить качественную и количественную оценку технологических погрешностей.

### Часть Б.

Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации “ММГ\_planar”, подтвердить полученные аналитические результаты.

### Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.8и

**Часть А. Исходные положения.** Математическая модель роторного ММГ [1-3]:

Информационное уравнение  $\ddot{y}_1 + 2h_1\dot{y}_1 + (k_{1T}^2 - \Omega^2)y_1 - \Omega^2(y_{1T} + y_{2T}) + 2\Omega\dot{x}_2 = 0, \quad (2.52)$

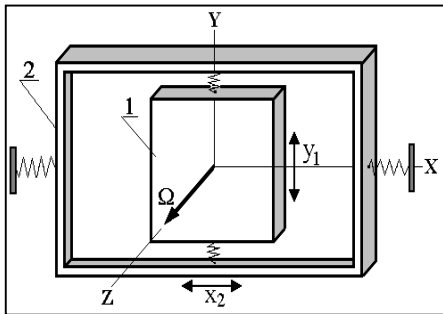
$$\ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_{2T}^2 - \Omega^2)x_2 - \Omega^2(dx_{1T} + x_{2T}) - 2d\Omega\dot{y}_2 = F \cos pt, \quad (2.53)$$

$$2h_1 = \mu_1/m_1, \quad 2h_2 = \mu_2/(m_1 + m_2), \quad k_{10}^2 = c_{10}/m_{10}, \quad k_{1T}^2 = (c_{10} + c_{1T})/(m_{10} + m_{1T}),$$

$$k_{20}^2 = c_{20}/(m_{10} + m_{20}), \quad k_{2T}^2 = (c_{20} + c_{2T})/(m_{10} + m_{1T} + m_{20} + m_{2T}),$$

$$F = F_*/(m_{10} + m_{1T} + m_{20} + m_{2T}), \quad d = (m_{10} + m_{1T})/(m_{10} + m_{1T} + m_{20} + m_{2T}),$$

$$m_i = m_{i0} + m_{iT}, \quad \mu_i = \mu_{i0} + \mu_{iT}, \quad c_i = c_{i0} + c_{iT}, \quad (i=1,2);$$



### • Оценки технологического дрейфа планарного ММГ на основе (2.52)

Приближенная формула для угловой скорости дрейфа планарного ММГ определяется на основании (2.52), как это было сделано в **задаче 2.5и**:

$$\Omega_{dr} \approx \frac{m_{1T}}{2m_{10}A_x p} \ddot{y}_1 + \frac{\mu_{1T}}{2m_{10}A_x p} \dot{y}_1 + \frac{c_{1T}}{2m_{10}A_x p} y_1, \quad (2.54)$$

### Качественный анализ (2.54)

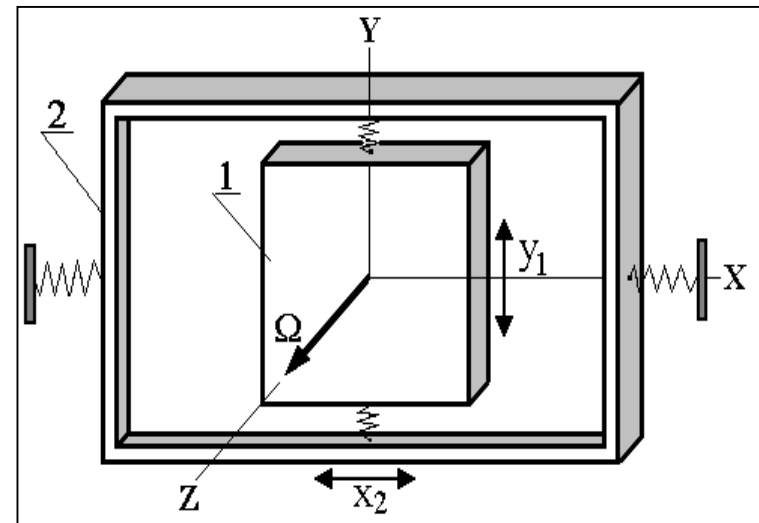
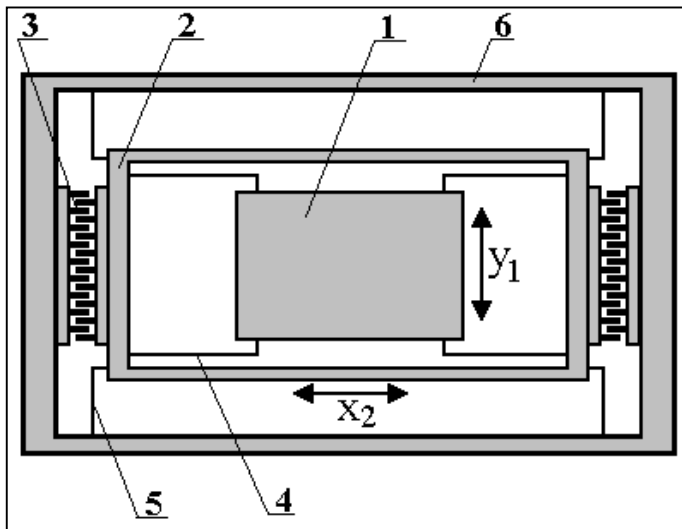
- Слагаемые в (2.54) определяют составляющие дрейфа, зависящие от измеряемой  $\Omega$ .
- Влияние технологических изменений массы ЧЭ 1 наиболее существенно, поскольку  $\ddot{y}_1 \sim p^2$ .

## Задания для самостоятельной работы

Исследовать, с помощью программы динамической визуализации “**MMG\_planar**”, влияние различных факторов и параметров на поведение планарного микромеханического гироскопа.

А, именно:

1. Влияние массовых характеристик ЧЭ.
2. Влияние вязкого демпфирования по каналу  $y_1$  вторичных колебаний от его полного отсутствия до конечных значений.
4. Влияние жесткостей подвеса по каналам первичных и вторичных колебаний.
5. Влияние амплитуды и частоты вынужденных первичных колебаний.
6. Влияние сочетаний технологического разброса параметров планарного ММГ (разбалансировки, технологические возмущения жесткости и изменения масс) на выходные характеристики гироскопа и его дрейф.
7. Влияние вариаций значений измеряемой угловой скорости.



## • Суперминиатюрные микромеханические гироскопы *LL, RR* и *LR* типов

- Известные конструкции [1-3,22] ММГ содержат дополнительные рамки и имеют сложную структуру упругих элементов подвеса, что приводит к высоким технологическим требованиям при изготовлении и к дополнительным погрешностям прибора.
  - Предлагается [24] **перспективная схема** (рис.2.26) супермалого (объем < 1 мм<sup>3</sup>) “простого” микромеханического гироскопа (СММГ) без дополнительных рамок.
- Эта же схема - основа не только ММГ, но и микромеханического акселерометра (ММА) т. е. основа супермалого multifunctional датчика инерциальной информации (СММГА).

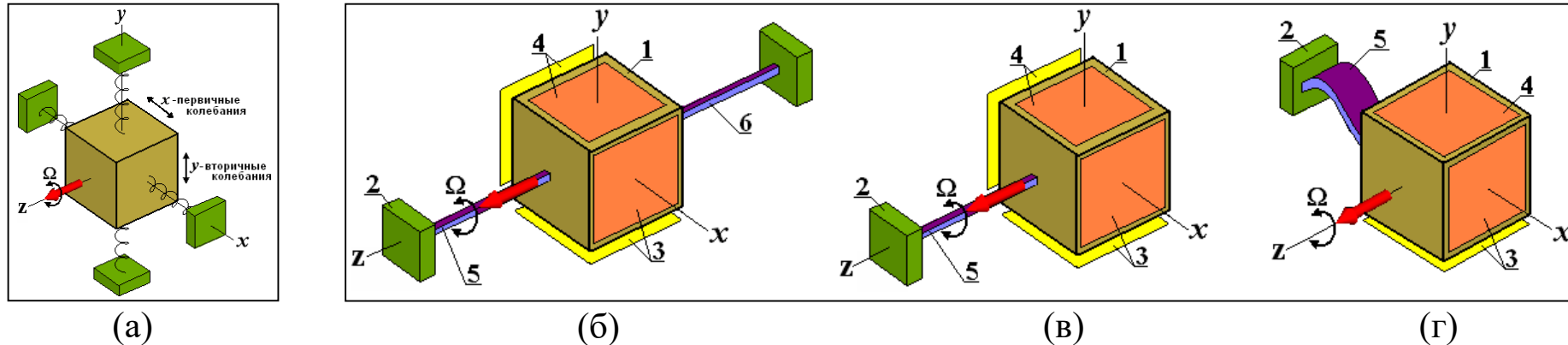


Рис.2.26. Обобщенная кинематическая схема (а) и конструктивные схемы СММГ:

- б) *LL* с двумя прямолинейными упругими элементами; в) *RR* с консольным прямолинейным упругим элементом;  
 г) *LR* с консольным криволинейным упругим элементом;  
 1 – ЧЭ; 2 - корпус; 3, 4 - МЭМС структуры; 5,6 - упругие элементы

• Осциллятор содержит ЧЭ 1, крепящийся к корпусу 2 на двух упругих элементах 5,6 (двухсторонний подвес) или одного упругого элемента (консольный подвес). Наиболее простые формы упругих элементов подвеса – прямолинейные стержни, но могут быть и криволинейные формы. Наиболее простая форма ЧЭ – куб.

• **Принцип действия СММГ** На противоположных гранях ЧЭ и корпусе располагаются микроэлектромеханические (МЭМС) структуры для возбуждения первичных колебаний по оси *x* заданной амплитуды и частоты и для съема выходной информации - вторичных колебаний по оси *y*, обусловленных кориолисовыми силами инерции при наличии измеряемой угловой скорости  $\Omega$ .

• Построение и исследование математических моделей СММГ представлено далее при решении учебно-исследовательских **задач 2.9и, 2.10и, 2.11и.**

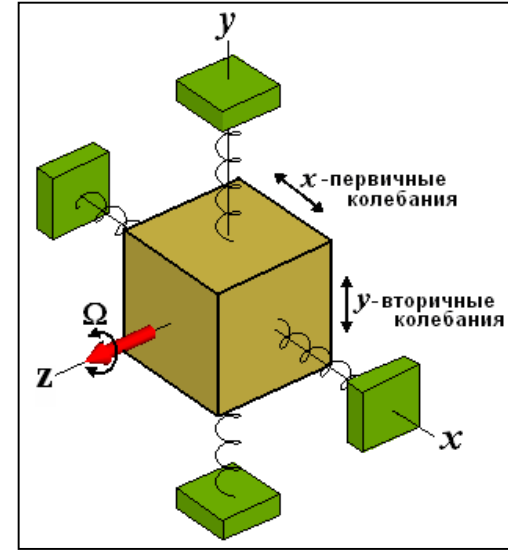
## Ответы и решения

## Практические задачи 1-го уровня сложности

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.30.** Закон вынужденных первичных колебаний СММГ  $x = A_x \sin pt$ , амплитуда  $A_x = 20$  мкм и частота  $p = 2\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ; закон вторичных колебаний  $y = A_y \sin(pt + \delta)$ , амплитуда  $A_y = 0,04$  мкм. Основание неподвижно. Вследствие технологических неточностей изготовления масса  $m$  ЧЭ на 1% отличается от номинального значения, т.е.  $m_T/m_0 = 0,01$ .

**Определить**, пользуясь формулой для дрейфа, максимальную величину угловой скорости дрейфа СММГ, обусловленного заданным технологическим отклонением массы  $m$ .



$$\Omega_{dr} \approx \frac{1}{2m_0 A_x p} (m_T \ddot{y} + \mu_T \dot{y} + c_T y) + \frac{m_0 + m_T}{2m_0 A_x p} \left( -\Omega_x^2 y + \Omega_x \Omega_y x + \Omega_x \Omega_y x_T - \Omega_x^2 y_T - \dot{\Omega}_x z_T - \Omega_x V_z + \dot{V}_y \right)$$

**Задача 2.31.** Закон вынужденных первичных колебаний СММГ  $x = A_x \sin pt$ , амплитуда  $A_x = 20$  мкм и частота  $p = 2\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ;

параметры вращательно - поступательного движения объекта, на котором установлен гироскоп,  $\Omega_x = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $V_z = 1 \text{ м/с}$ ; масса гироскопа номинальная  $m = m_0$ .

**Определить**, пользуясь формулой для дрейфа, величину составляющей угловой скорости дрейфа СММГ, обусловленного заданным движением объекта  $\Omega_x V_z$ .



# Учебно - исследовательская задача 2-го уровня сложности

**Задача 2.9и.** Провести аналитическое и численное исследование **СММГ LL** типа (рис.2.26а,б).

## Часть А.

Используя математическую модель [24] провести анализ СММГ LL типа на произвольно движущемся основании, выявить его основные особенности, провести качественную и количественную оценку технологических погрешностей.

## Часть Б.

Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации “SMMG1”, подтвердить полученные аналитические результаты.

## Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.9и

### Часть А. Исходные положения.

Ц. м. подвижного объекта перемещается со скоростью  $V(V_x, V_y, V_z)$  и объект вращается вокруг ц. м. с угловой скоростью  $\Omega(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ . В общем случае:  $V_x(t)$ ,  $V_y(t)$ ,  $V_z(t)$  и  $\Omega_x(t)$ ,  $\Omega_y(t)$ ,  $\Omega_z(t)$ .

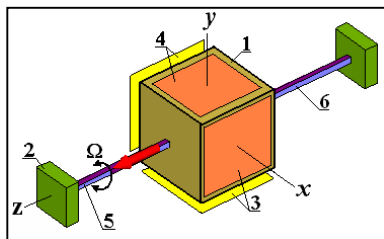
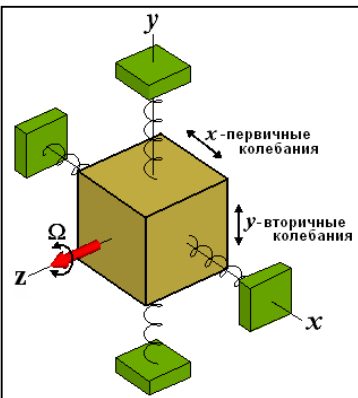
Измеряемая угловая скорость в общем случае  $\Omega = \Omega_z(t)$ . Составляющие ускорения объекта  $\dot{V}_x, \dot{V}_y$ .

• Математическая модель СММГ LL типа [24]- обобщенные уравнения движения:

Информационное уравнение

$$\ddot{y} + \frac{\mu}{m} \dot{y} + (c/m - \Omega^2 - \Omega_x^2)y + 2\Omega\dot{x} + (\Omega_x\Omega_y + \dot{\Omega})(x + x_T) - (\Omega^2 + \Omega_x^2)y_T + (\Omega_y\Omega + \dot{\Omega}_x)z_T - \Omega_x V_z + \Omega V_x + \dot{V}_y = 0, \quad (2.55)$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + (c/m - \Omega^2 - \Omega_y^2)x - 2\Omega\dot{y} + (\Omega_x\Omega_y - \dot{\Omega})(y + y_T) - (\Omega^2 + \Omega_y^2)x_T + (\Omega_x\Omega + \dot{\Omega}_y)z_T + \Omega_y V_z - \Omega V_y + \dot{V}_x = F \cos pt, \quad (2.56)$$



$x(t)$ ,  $y(t)$  – координаты ЧЭ - первичные и вторичные колебания;  
 $F$ ,  $p$  – амплитуда и частота вынуждающей силы;  
 $m = m_0 + m_T$ ,  $\mu = \mu_0 + \mu_T$ ,  $c = c_0 + c_T$ ;  $m_0$ ,  $m_T$ ,  $\mu_0$ ,  $c_0$ ,  $\mu_T$ ,  $c_T$  – номинальные и технологически измененные массы; коэффициенты демпфирования и жесткости.

- Уравнения движения **“идеального”** (без погрешностей) СММГ на произвольно движущемся основании:

$$\ddot{y} + \frac{\mu}{m} \dot{y} + \left( \frac{c}{m} - \Omega^2 - \Omega_x^2 \right) y + 2\Omega \dot{x} + (\Omega_x \Omega_y + \dot{\Omega}) x - \Omega_x V_z + \Omega V_x + \dot{V}_y = 0, \quad (2.57)$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \left( \frac{c}{m} - \Omega^2 - \Omega_y^2 \right) x - 2\Omega \dot{y} + (\Omega_x \Omega_y - \dot{\Omega}) y + \Omega_y V_z - \Omega V_y + \dot{V}_x = F \cos pt \quad (2.58)$$

- Уравнения движения **“идеального”** СММГ на **“идеально”** движущемся основании (имеется только измеряемая угловая скорость  $\Omega = \text{const}$ ):

$$\ddot{y} + \frac{\mu}{m} \dot{y} + (c/m - \Omega^2) y + 2\Omega \dot{x} = 0, \quad (2.59)$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + (c/m - \Omega^2) x - 2\Omega \dot{y} = F \cos pt \quad (2.60)$$

Поступательное и угловое движение основания описывается [25] соотношениями с постоянными и переменными составляющими по осям  $x, y, z$ :

$$V_{x(y,z)}(t) = V_{x0(y0,z0)} + B_{x(y,z)} t + A_{x(y,z)} \sin(q_{x(y,z)} t) \quad (2.61)$$

$$\dot{V}_{x(y,z)}(t) = W_{x(y,z)}(t) = B_{x(y,z)} + A_{x(y,z)} q_{x(y,z)} \cos(q_{x(y,z)} t) \quad (2.62)$$

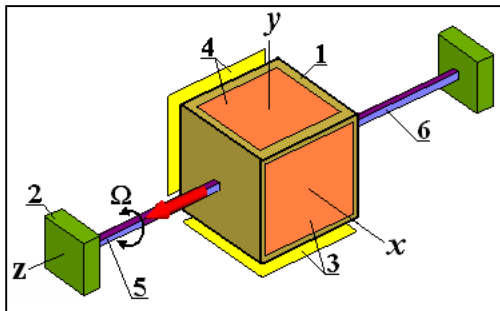
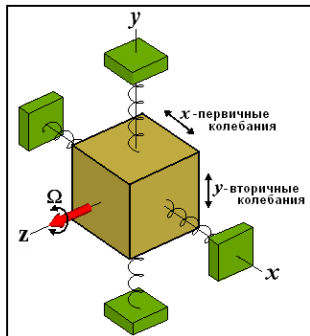
$$\Omega_{x(y,z)}(t) = \Omega_{x0(y0,z0)} + E_{x(y,z)} t + D_{x(y,z)} \sin(r_{x(y,z)} t) \quad (2.63)$$

$$\dot{\Omega}_{x(y,z)}(t) = \varepsilon_{x(y,z)} = E_{x(y,z)} + D_{x(y,z)} r_{x(y,z)} \cos(r_{x(y,z)} t) \quad (2.64)$$

Постоянные и переменные поступательные и угловые скорости и ускорения в общем виде:

$$W(t) = W_0 + W_1 \cos(\omega_w t) \quad V(t) = W_0 t + (W_1 / \omega_w) \sin(\omega_w t) \quad (2.65)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\omega_\varepsilon t) \quad \Omega(t) = \varepsilon_0 t + (\varepsilon_1 / \omega_\varepsilon) \sin(\omega_\varepsilon t)$$



СММГ настроен на резонанс.  
Собственные частоты при  $\mu = 0$ :

$$k^2 = c/m + \Omega^2 \pm 2\Omega \sqrt{c/m} \quad (2.66)$$

В реальных условиях  $\Omega^2 \ll c/m$ , поэтому  $k^2 = c/m = p^2$ .

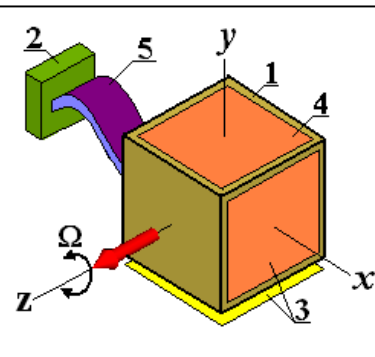
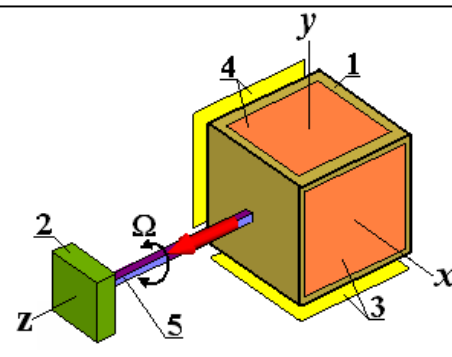
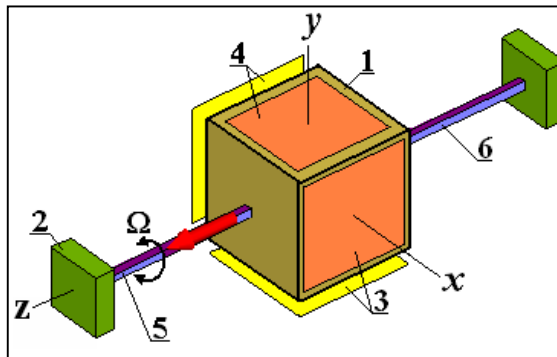
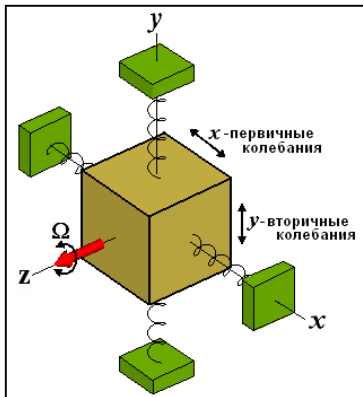
- Приближенная формула для угловой скорости дрейфа СММГ определяется на основании (2.15), как это было сделано в **задаче 2.5и**:

$$\Omega_{dr} \approx \frac{1}{2m_0 A_x p} (m_T \ddot{y} + \mu_T \dot{y} + c_T y) + \frac{m_0 + m_T}{2m_0 A_x p} \left( -\Omega_x^2 y + \Omega_x \Omega_y x + \Omega_x \Omega_y x_T - \Omega_x^2 y_T - \dot{\Omega}_x z_T - \Omega_x V_z + \dot{V}_y \right), \quad (2.67)$$

$A_x$  - заданная амплитуда возбуждаемых первичных колебаний ЧЭ

### Качественный анализ (2.67)

- Слагаемые в первой скобке определяют составляющие дрейфа за счет температурных или технологических отклонений демпфирования  $\mu_T$ , жесткости  $c_T$  упругих элементов или технологических изменений  $m_T$  массы ЧЭ от номинальных значений.
  - Слагаемые во второй скобке определяют составляющие дрейфа за счет перекрестных угловых и поступательных скоростей и ускорений подвижного объекта, на котором установлен СММГ, при наличии и отсутствии температурных или технологических разбалансировок  $x_T$ ,  $y_T$ ,  $z_T$ .
- Наиболее существенным во второй скобке представляется влияние дополнительной составляющей силы инерции Кориолиса, определяемой слагаемым  $\Omega_x V_z$  (вращение объекта вокруг оси первичных колебаний  $x$  с одновременным поступательным движением по измерительной оси  $z$ ) при значительных скоростях  $V_z$  объекта.



## Задания для самостоятельной работы

Исследовать, с помощью программы динамической визуализации “SMMG1”, влияние различных факторов и параметров на поведение СММГ *LL* типа.

А, именно:

1. Моделирование измерения гармонически изменяющейся угловой скорости

$$\Omega = \Omega_0 \sin \omega t, \text{ где } \Omega_0 = 1 \div 4 \text{ с}^{-1}; \quad \omega = (0,01 \div 0,1) \text{ р.}$$

2. Влияние вязкого демпфирования по каналу *y* вторичных колебаний от его полного отсутствия до конечных значений.

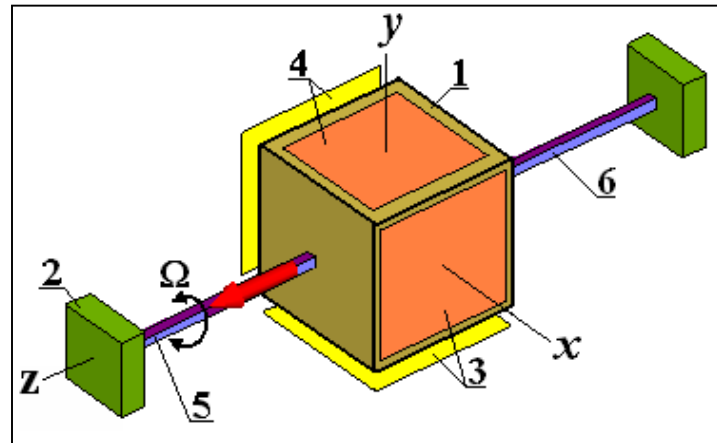
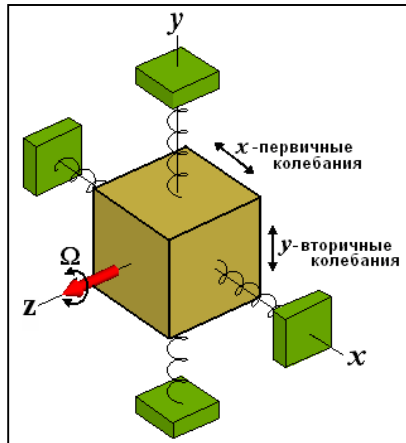
3. Влияние жесткостей подвеса по каналам первичных и вторичных колебаний.

4. Влияние амплитуды и частоты вынужденных первичных колебаний.

5. Влияние постоянных и переменных (например, поступательных и угловых вибраций подвижного объекта) механических воздействий.

6. Влияние разбалансировок и сочетаний технологического разброса параметров по массе, демпфированию и жесткости подвеса на выходные характеристики СММГ при различных постоянных измеряемых угловых скоростях  $\Omega = 1 \div 4 \text{ с}^{-1}$ .

7. Проведение сравнительных исследований СММГ *LL* типа и планарного ММГ.



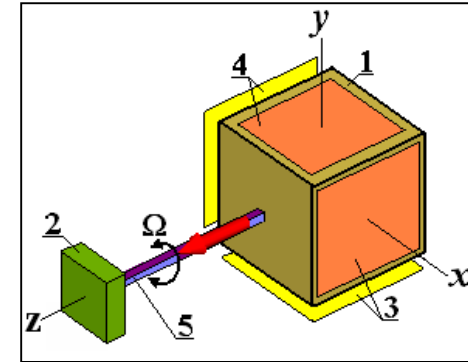
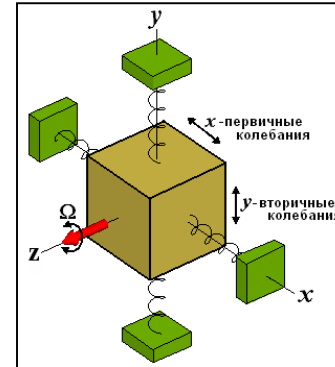
**Задача 2.10и.** Провести аналитическое и численное исследование **СММГ RR** типа (рис.2.26а,в).

### Часть А.

Используя математическую модель [24] провести анализ СММГ *RR* типа с консольным прямолинейным подвесом ЧЭ на движущемся основании  $\Omega = \Omega_z = \text{const}$ , выявить его основные особенности.

### Часть Б.

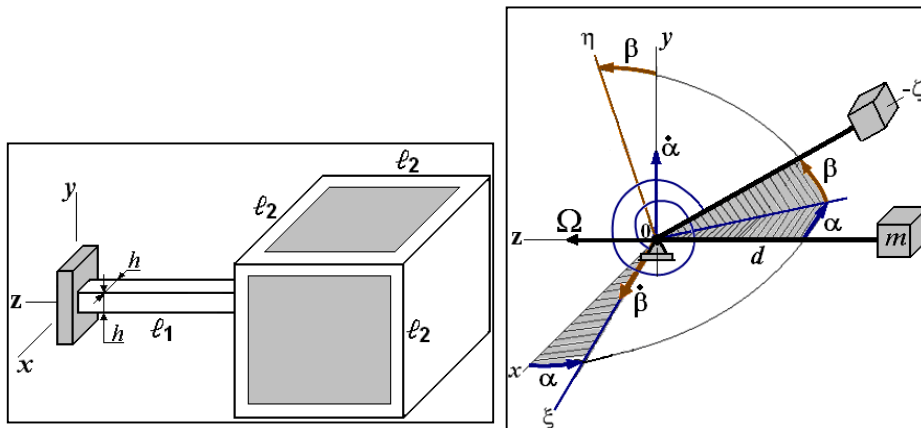
Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации “SMMG\_cons”, подтвердить полученные аналитические результаты.



## Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.10и

### Часть А. Исходные положения.

Конструктивная и кинематическая схема датчика, учитывающие угловые первичные колебания по  $\alpha$  с заданной амплитудой и частотой, и вторичные колебания по  $\beta$  за счет сил Кориолиса, при наличии переносной угловой скорости  $\Omega$  основания, на рис.2.28. Имеем “идеальный” датчик, на основании, вращающемся с угловой скоростью  $\Omega = \text{const}$ .



### Кинетическая энергия и обобщенные силы

$$E = md^2 [\dot{\beta} - \Omega \sin \alpha]^2 / 2 + md^2 [\dot{\alpha} \cos \beta + \Omega \sin \beta]^2 / 2 \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} Q_\beta &= -c\beta - \mu\dot{\beta} \\ Q_\alpha &= -c\alpha - \mu\dot{\alpha} + M_0 \cos pt \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.69)$$

Рис.2.28. СММГ *RR* типа с консольным подвесом ЧЭ и прямолинейной формой упругого элемента и его кинематическая схема



## • Нелинейные уравнения движения СММГ RR типа

Информационное  
уравнение

$$\ddot{\beta} + \frac{\mu}{md^2} \dot{\beta} + \frac{c}{md^2} \beta - \Omega \dot{\alpha} (\cos \alpha + \cos 2\beta) + \left( \frac{\dot{\alpha}^2 - \Omega^2}{2} \right) \sin 2\beta = 0 \quad (2.70)$$

$$(\cos^2 \beta) \ddot{\alpha} + \frac{\mu}{md^2} \dot{\alpha} + \frac{c}{md^2} \alpha + \Omega \dot{\beta} (\cos \alpha + \cos 2\beta) - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta - \frac{\Omega^2}{2} \sin 2\alpha = \frac{M_0}{md^2} \cos pt \cos \alpha, \quad (2.71)$$

• **Линеаризованные уравнения**  
(для малых колебаний)

$$\ddot{\beta} + \frac{\mu}{md^2} \dot{\beta} + \left( \frac{c}{md^2} - \Omega^2 \right) \beta - 2\Omega \dot{\alpha} = 0 \quad (2.72)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{\mu}{md^2} \dot{\alpha} + \left( \frac{c}{md^2} - \Omega^2 \right) \alpha + 2\Omega \dot{\beta} = \frac{M_0}{md^2} \cos pt \quad (2.73)$$

### Важные особенности СММГ RR типа

• Уравнения (2.72), (2.73) **полностью аналогичны** уравнениям (2.59), (2.60) для поступательных колебаний СММГ, что подтверждает **обобщенный характер** уравнений (2.55), (2.56) и следующих из них уравнений (2.59), (2.60).

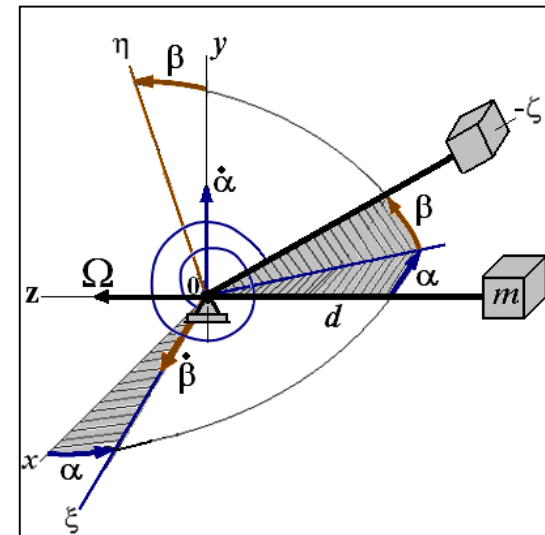
• В консольном подвесе имеет место не поступательное, а **малое угловое** движение ЧЭ под некоторым малым углом  $\gamma$  ( $\cos \gamma \approx 1$ ,  $\sin \gamma \approx \gamma$ ). ЧЭ совершает [22] колебания  $A \sin pt$  и при измеряемой угловой скорости  $\Omega$  действует ускорение Кориолиса  **$W_K = 2\Omega A p \sin pt$** .

Одновременно вдоль этой же оси действует составляющая ускорения вынужденных колебаний  **$W_{кв} = -\gamma A p^2 \sin pt = \gamma A p^2 \cos(pt + \pi/2)$** .

Это ускорение измеряется также, как и ускорение Кориолиса и вносит погрешность, называемую **квадратурной**, поскольку имеется сдвиг фаз на  $\pi/2$  по отношению к  $W_K$ .

• Представим эту погрешность в виде отношения амплитуд  $W_{кв}/W_K = \eta = 0,5\gamma p/\Omega$ .

Полагая  $\eta = 0,01$  (1%),  $\Omega = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $p = 2\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ , получим  **$\gamma = 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$** , т.е. **точность направления** колебаний должна быть **достаточно высокой**.



## Задания для самостоятельной работы

- Вывести нелинейные уравнения вида (2.70),(2.71) движения гироскопа из уравнений Лагранжа 2-го рода.

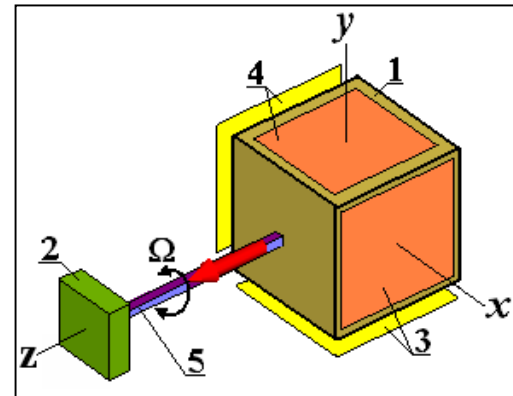
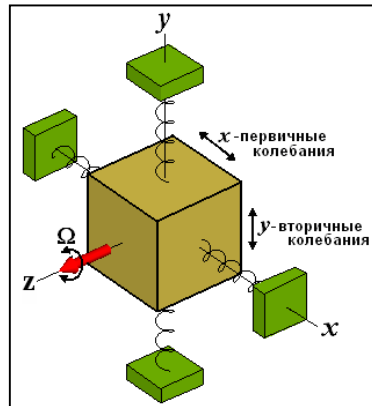
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \beta} = Q_{\beta} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \alpha} = Q_{\alpha}$$

- Кинетическая энергия и обобщенные силы определяются выражениями (2.68),(2.69).
- Линеаризовать полученные нелинейные уравнения для малых углов и их производных, получить уравнения (2.72),(2.73). Получить из них линеаризованные уравнения движения при отсутствии демпфирования.

- Исследовать, с помощью программы динамической визуализации “SMMG\_cons”, влияние различных параметров на поведение СММГ RR типа.

А, именно:

- Влияние вязкого демпфирования по каналу  $\beta$  вторичных колебаний от его полного отсутствия до конечных значений.
- Влияние жесткостей подвеса по каналам первичных и вторичных колебаний (при резонансной настройке и без нее).
- Влияние амплитуды и частоты вынужденных первичных колебаний.
- Влияние изменений значений измеряемых угловых скоростей на линейность выходных характеристик гироскопа.



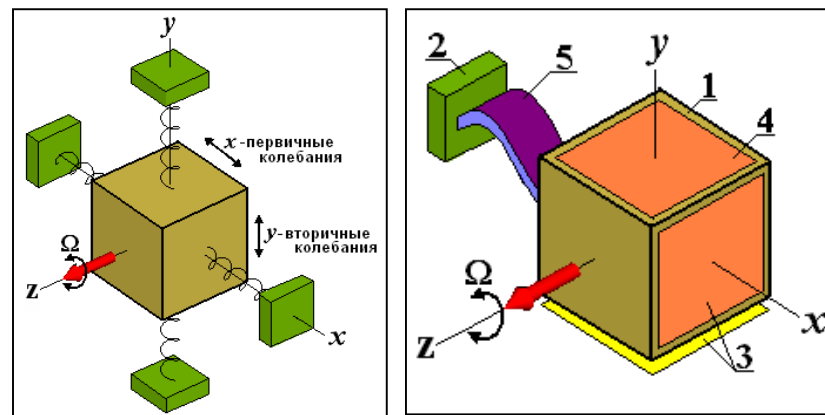
**Задача 2.11и.** Провести аналитическое и численное исследование **СММГ LR** типа (рис.2.26а,г).

### Часть А.

Используя математическую модель [24] провести анализ СММГ LR типа с консольным криволинейным подвесом ЧЭ на движущемся основании  $\Omega = \Omega_z = \text{const}$ , выявить его основные особенности.

### Часть Б.

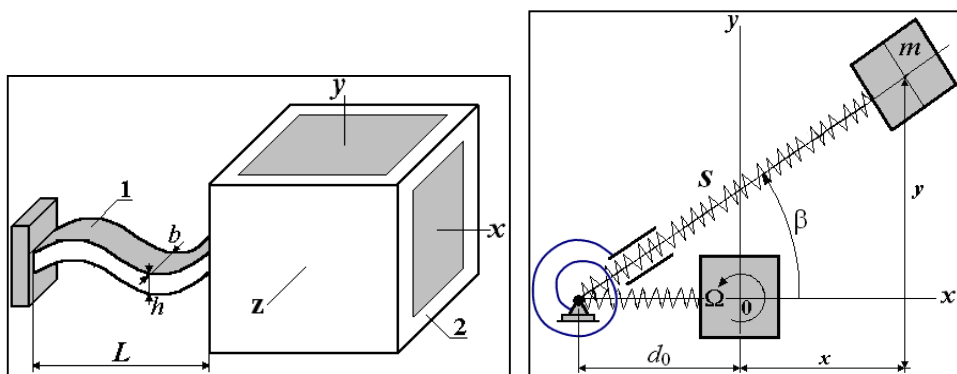
Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации “SMMG\_cons”, подтвердить полученные аналитические результаты.



## Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.11и

### Часть А. Исходные положения.

Конструктивная и кинематическая схема, учитывающая поступательные первичные колебания и угловые вторичные колебания, возникающие за счет сил инерции Кориолиса, при наличии переносной угловой скорости  $\Omega$  основания, представлены на рис.2.30.



### Кинетическая энергия и обобщенные силы

$$E = m[s\dot{\beta} + \Omega(s - d_0 \cos \beta)]^2 / 2 + m[\dot{s} - \Omega d_0 \sin \beta]^2 / 2 \quad (2.74)$$

$$Q_{\beta} = -c_{\beta}\beta - \mu s^2\dot{\beta} - F_* s \cos pt \sin \beta \quad (2.75)$$

$$Q_s = -c_s(s - d_0) - \mu\dot{s} + F_* \cos pt \cos \beta$$

Рис.2.30. СММГ LR типа с консольным подвесом ЧЭ и криволинейной гармонической формой упругого элемента и его кинематическая схема

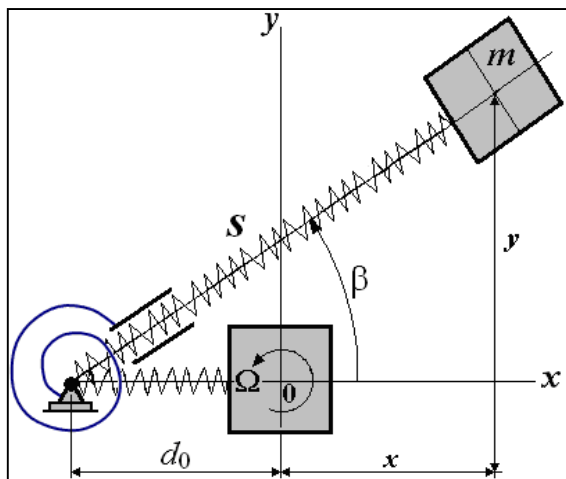
## • Нелинейные уравнения движения СММГ LR типа

Информационное  
уравнение

$$\ddot{\beta} + \frac{\mu}{m} \dot{\beta} + \frac{c_{\beta}}{ms^2} \beta + \frac{2\Omega}{s} \dot{s} + \frac{2}{s} \dot{s} \dot{\beta} - \frac{\Omega^2 d_0}{s} \sin \beta = -\frac{F_* \cos pt}{ms} \sin \beta \quad (2.76)$$

$$\ddot{s} + \frac{\mu}{m} \dot{s} + \left( \frac{c_s}{m} - \Omega^2 - \dot{\beta}^2 \right) s - 2\Omega s \dot{\beta} + d_0 \left( \Omega^2 \cos \beta - \frac{c_s}{m} \right) = \frac{F_* \cos pt}{m} \cos \beta \quad (2.77)$$

## • Линеаризованные уравнения (малые колебания)



$$s = x + d_0 \approx d_0 \quad \dot{s} = \dot{x} \quad \ddot{s} = \ddot{x} \quad \beta = y/d_0 \quad \dot{\beta} = \dot{y}/d_0 \quad \ddot{\beta} = \ddot{y}/d_0$$

$$\ddot{y} + \frac{\mu}{m} \dot{y} + \left( \frac{c_{\beta}}{md_0^2} - \Omega^2 \right) y + 2\Omega \dot{x} + \frac{2\dot{x}\dot{y}}{d_0} = -\frac{F_*}{md_0} y \cos pt \quad (2.78)$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \left( \frac{c_s}{m} - \Omega^2 - \frac{\dot{y}^2}{d_0^2} \right) x - 2\Omega \dot{y} - \frac{2\Omega \dot{y}}{d_0} x = \frac{F_* \cos pt}{m} \quad (2.79)$$

## Важные особенности СММГ LR типа

- Уравнения (2.78), (2.79) отличаются от уравнений (2.59), (2.60) для поступательных колебаний, **только наличием подчеркнутых членов.**
- Учет неперпендикулярности направлений первичных и вторичных колебаний в СММГ с криволинейной гармонической формой упругого элемента **приводит к дополнительным малым погрешностям второго порядка** в левых частях уравнений первичных и вторичных колебаний.
- Особо отметим наличие в правой части информационного уравнения вторичных колебаний малой (по сравнению с вынуждающей силой в уравнении первичных колебаний) гармонически изменяющейся вынуждающей силы  $F_* y \cos pt / md_0$ , появляющейся за счет неперпендикулярности первичных и вторичных колебаний.

## Задания для самостоятельной работы

- Вывести нелинейные уравнения вида (2.76),(2.77) движения гироскопа из уравнений Лагранжа 2-го рода.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \beta} = Q_{\beta} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial E}{\partial s} = Q_s$$

- Кинетическая энергия и обобщенные силы определяются выражениями (2.74),(2.75).
- Линеаризовать полученные нелинейные уравнения для малых углов и их производных, получить уравнения (2.78),(2.79). Получить из них линеаризованные уравнения движения при отсутствии демпфирования.

- Исследовать, с помощью программы динамической визуализации “SMMG\_cons”, влияние различных параметров на поведение СММГ *LR* типа.

А, именно:

- Влияние вязкого демпфирования по каналу  $\beta$  вторичных колебаний от его полного отсутствия до конечных значений.
- Влияние жесткостей подвеса по каналам первичных и вторичных колебаний (при резонансной настройке и без нее).
- Влияние амплитуды и частоты вынужденных первичных колебаний.
- Влияние изменений значений измеряемых угловых скоростей на линейность выходных характеристик гироскопа.

