

2.4. Практические и учебно-исследовательские задачи для волновых твердотельных гироскопов с использованием компьютерной модели

Краткие сведения по теории

Волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) (рис.2.8, 2.9 [1]) состоит из полусферического кварцевого резонатора (радиусом $r_0 \approx 25 \div 35$ мм и менее), обеспечивающего высокую изотропию физико-механических свойств и малый α_T . Зазоры между электродами возбуждения и съема и поверхностями резонатора составляют $100 \div 150$ мкм. Колебания резонатора ВТГ возбуждаются на резонансной частоте, например, $\approx 2,8$ кГц.

• **Принцип действия ВТГ** основан на свойстве инертности упругих волн, возбужденных в резонаторе при его вращении вокруг оси симметрии. Пусть имеется упругая полусферическая оболочка-резонатор, в которой возбуждены стоячие волны в двух взаимно-перпендикулярных направлениях X, Y (рис.2.9). Эти стоячие волны имеют определенное расположение пучностей (E, F, G, H) и узлов (A, B, C, D). При вращении резонатора вокруг оси Z с угловой скоростью $\Omega(t)$, узлы и пучности прецессируют относительно резонатора (и инерциального пространства).

Главные достоинства и особенности ВТГ – отсутствие быстровращающегося ротора, механическая прочность и радиационная стойкость, малая чувствительность к внешним нагрузкам и температурным воздействиям.

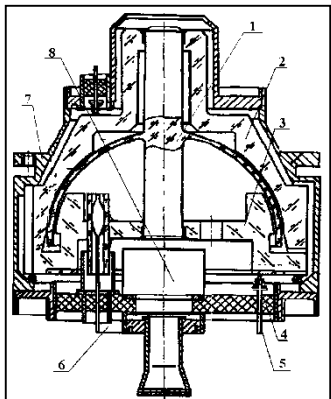


Рис.2.8. Конструкция ВТГ: 1,2,3–кварцевые резонатор и корпуса; 4–керамическая колодка; 5,6–гермовыводы; 7–кожух; 8–насос

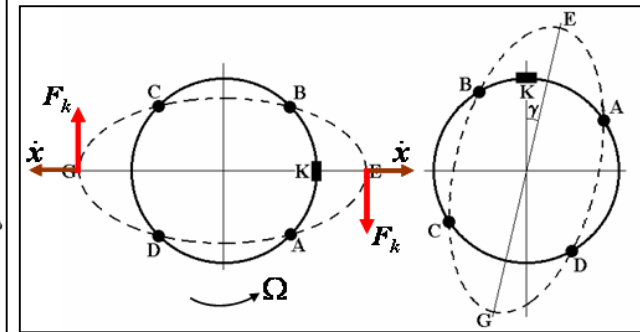
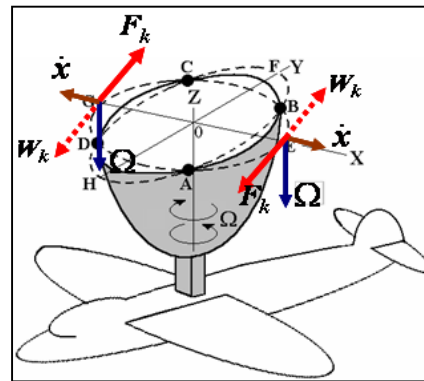


Рис.2.9. Стоячая волна в резонаторе и проявление свойства инертности упругой волны при повороте резонатора на 90° вокруг оси Z

• Построение и исследование уравнений движения (математической модели) **ВТГ** представлено далее при решении учебно-исследовательской **задачи 2.4и**.

Ответы и решения

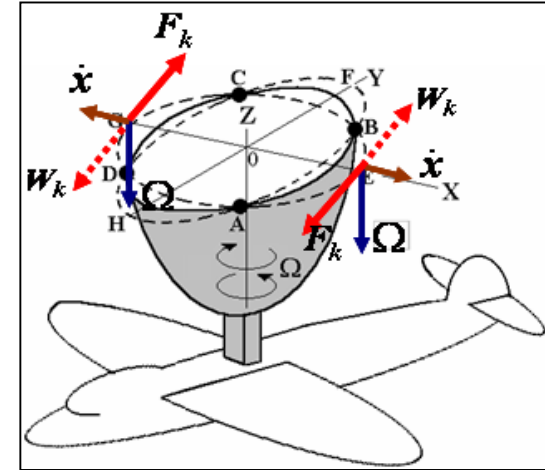
Практические задачи 1-го уровня сложности Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.17. Параметры волнового твердотельного гироскопа:

Приведенная амплитуда вынуждающей силы $F=10^4 \text{м/с}^2$, частота $\lambda=2800 \text{Гц} = 17584 \text{с}^{-1}$, безразмерный коэффициент, учитывающий характеристики резонатора в кориолисовых силах инерции $\eta=10^3$, приведенный коэффициент вязкого демпфирования $\mu=10^3 \text{с}^{-1}$, измеряемая угловая скорость отсутствует $\Omega = 0$.

Найти амплитуду $A[\text{мкм}]$ и фазы $\text{tg}\delta$, $\text{tg}\varepsilon$ вынужденных колебаний резонатора.

$$y = A \sin(\lambda t + \varepsilon) \quad x = A \sin(\lambda t + \delta) \quad A = \frac{F}{\lambda \sqrt{\mu^2 + 4\eta^2 \Omega^2}} \quad \text{tg}\varepsilon = -\frac{2\eta\Omega}{\mu} \quad \text{tg}\delta = \frac{\mu}{2\eta\Omega}$$

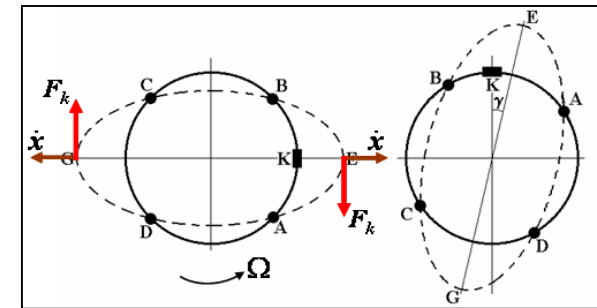


Задача 2.18. Параметры волнового твердотельного гироскопа:

Приведенная амплитуда вынуждающей силы $F=10^4 \text{м/с}^2$, частота $\lambda=2800 \text{Гц} = 17584 \text{с}^{-1}$, безразмерный коэффициент, учитывающий характеристики резонатора в кориолисовых силах инерции $\eta=10^3$, приведенный коэффициент вязкого демпфирования $\mu=10^3 \text{с}^{-1}$, измеряемая угловая скорость $\Omega = 1 \text{с}^{-1}$.

Найти амплитуду $A[\text{мкм}]$ и фазы $\text{tg}\delta$, $\text{tg}\varepsilon$ вынужденных колебаний резонатора.

$$y = A \sin(\lambda t + \varepsilon) \quad x = A \sin(\lambda t + \delta) \quad A = \frac{F}{\lambda \sqrt{\mu^2 + 4\eta^2 \Omega^2}} \quad \text{tg}\varepsilon = -\frac{2\eta\Omega}{\mu} \quad \text{tg}\delta = \frac{\mu}{2\eta\Omega}$$



Задача 2.19. Параметры волнового твердотельного гироскопа:

Приведенная амплитуда вынуждающей силы $F=10^4 \text{ м/с}^2$, частота $\lambda=2800 \text{ Гц} = 17584 \text{ с}^{-1}$, безразмерный коэффициент, учитывающий характеристики резонатора в кориолисовых силах инерции $\eta=10^3$, приведенный коэффициент вязкого демпфирования $\mu=0$.

Какую угловую скорость Ω [град/с] может измерить ВТГ, если амплитуда колебаний резонатора $A=1 \text{ мм}$?

$$y = A \sin(\lambda t + \varepsilon) \quad x = A \sin(\lambda t + \delta) \quad A = \frac{F}{\lambda \sqrt{\mu^2 + 4\eta^2 \Omega^2}}$$

Задача 2.20. Параметры волнового твердотельного гироскопа:

Приведенная амплитуда вынуждающей силы $F=10^4 \text{ м/с}^2$, частота $\lambda=2800 \text{ Гц} = 17584 \text{ с}^{-1}$. Соотношение $\mu/\eta = 0$ (высокая добротность), технологическая разбалансировка резонатора $x_T=1 \text{ мкм}$. Измеряемая угловая скорость $\Omega=1 \text{ с}^{-1}$.

Найти, обусловленную разбалансировкой резонатора, угловую скорость дрейфа ВТГ $\Omega_{dr}[\%]$ по отношению к измеряемой угловой скорости Ω на основе формулы

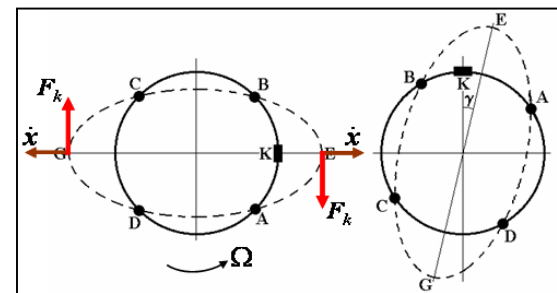
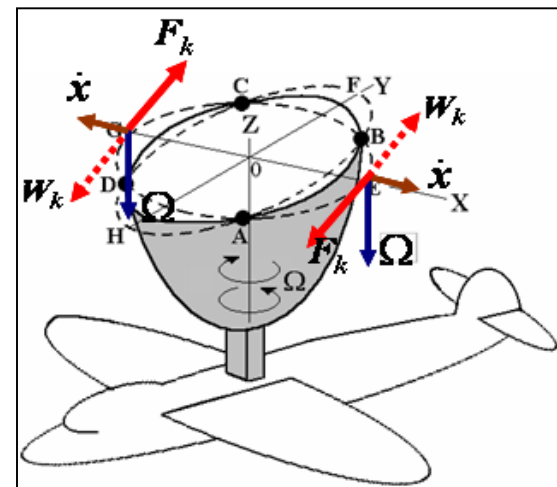
$$\Omega_{xdr} \approx \frac{\sqrt{\mu^2/\eta^2 + \Omega^2}}{2F} (\mu_T \dot{x}(t) + 2\lambda_T \lambda x(t) + x_T \lambda^2)$$

Задача 2.21. Параметры волнового твердотельного гироскопа:

Приведенная амплитуда вынуждающей силы $F=10^4 \text{ м/с}^2$, частота $\lambda=2800 \text{ Гц} = 17584 \text{ с}^{-1}$. Соотношение $\mu/\eta=10$ (низкая добротность), технологическая разбалансировка резонатора $x_T=1 \text{ мкм}$. Измеряемая угловая скорость $\Omega=1 \text{ с}^{-1}$.

Найти, обусловленную разбалансировкой резонатора, угловую скорость дрейфа ВТГ $\Omega_{dr}[\%]$ по отношению к измеряемой угловой скорости Ω на основе формулы

$$\Omega_{xdr} \approx \frac{\sqrt{\mu^2/\eta^2 + \Omega^2}}{2F} (\mu_T \dot{x}(t) + 2\lambda_T \lambda x(t) + x_T \lambda^2)$$



Учебно - исследовательская задача 2-го уровня сложности

Задача 2.4и. Провести аналитическое и численное исследование **волнового твердотельного гироскопа** (рис.2.9).

Часть А.

Используя приближенную математическую модель [1-3,15-21] провести анализ ВТГ, выявить его основные особенности, провести качественную и количественную оценку технологических погрешностей ВТГ.

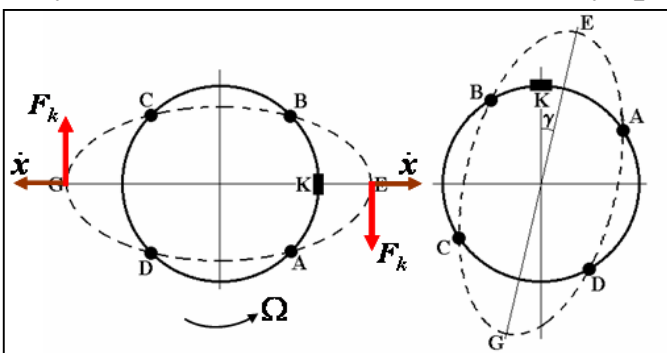
Часть Б.

Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации "VTG", подтвердить полученные аналитические результаты.

Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.4и

Часть А. Исходные положения

Приближенная математическая модель ВТГ Журавлева В.Ф., Климова Д.М.[15,16] и др. [17-21] с учетом диссипативных сил и управляющих сил при измеряемой скорости $\Omega = \text{const}$:



$$\ddot{x} + \mu_* \dot{x} + \omega^2 (x + x_T) + 2\eta\Omega \dot{y} = F \sin \lambda t \quad (2.28)$$

$$\ddot{y} + \mu_* \dot{y} + \omega^2 (y + y_T) - 2\eta\Omega \dot{x} = F \cos \lambda t \quad (2.29)$$

$$\gamma(t) = -\frac{1}{2(1-v)k^2} [2 + v - \sqrt{(2+v)^2 + 4(1-v)k^2}] \Omega t \quad (2.30)$$

$x(t)$, $y(t)$ - перемещения кромки резонатора; $\mu_* = \mu + \mu_T$ - коэффициент демпфирования; μ - номинал; μ_T - малая "температурная" или "технологическая" составляющая; $\omega = \lambda + \lambda_T$ - частота колебаний; λ - номинальное значение резонансной частоты; λ_T - малая составляющая; x_T, y_T - малые "температурные" или "технологические" смещения кромки резонатора; $2\eta\Omega \dot{y}$, $2\eta\Omega \dot{x}$ - силы Кориолиса; η - безразмерный коэффициент, учитывающий характеристики резонатора; $\gamma(t)$ - угол поворота стоячей волны отн-но резонатора; F - приведенная амплитуда управляющих гармонических сил; $k=2$ - номер формы колебаний; v - коэффициент Пуассона; Ωt - угол поворота корпуса ВТГ.

• Оценки технологического дрейфа ВТГ на основе уравнений (2.1),(2.2)

Для ВТГ на **неподвижном** основании ($\Omega=0$) и **наличии** технологических погрешностей (“ T ” $\neq 0$) суммы все сил :

$$\sum F_{xT} = \ddot{x} + (\mu + \mu_T)\dot{x} + (\lambda + \lambda_T)^2(x + x_T) - F \sin \lambda t \quad (2.31)$$

Для ВТГ на **подвижном** основании ($\Omega=\text{const} \neq 0$) и **отсутствии** технологических погрешностей (“ T ” $=0$) эти суммы сил :

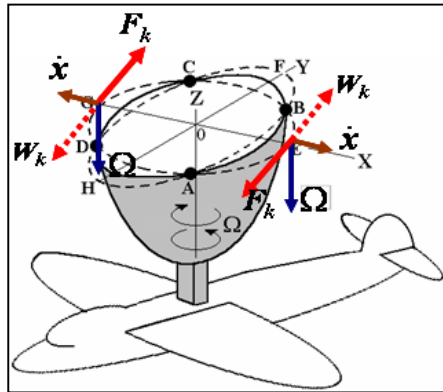
$$\sum F_x = \ddot{x} + \mu\dot{x} + \lambda^2 x + 2\eta\Omega\dot{y} - F \sin \lambda t \quad (2.32)$$

Приравнявая уравнения (2.31) и (2.32) и, разрешая относительно Ω , получим приближенную оценку **угловой скорости технологического дрейфа ВТГ**:

$$\Omega_{xdr} \approx \frac{\sqrt{\mu^2/\eta^2 + \Omega^2}}{2F} (\mu_T \dot{x}(t) + 2\lambda_T \lambda x(t) + x_T \lambda^2) \quad (2.33)$$

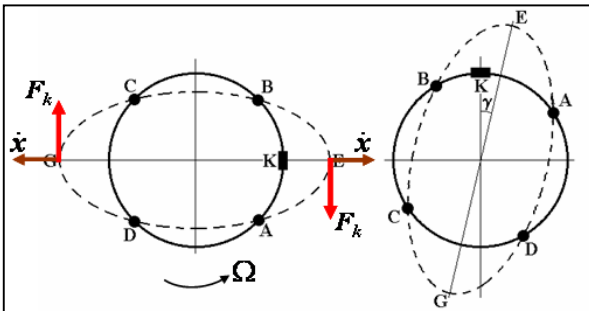
Амплитуды скоростей вынужденных колебаний

$$A_{\dot{x}} \approx F / \sqrt{\mu^2 + 4\eta^2 \Omega^2}$$



Качественный анализ (2.33)

- Первые два слагаемых определяют “переменные” составляющие дрейфа за счет технологических отклонений демпфирования μ_T и резонансной частоты λ_T от номинальных значений.
- Последнее слагаемое - ”постоянная” составляющая дрейфа, определяемая технологическими изменениями x_T формы резонатора в плоскости стоячей волны.
- При большой добротности резонатора ($\mu/\eta \ll \Omega$) дрейф ВТГ, определяемый изменениями x_T : $\Omega_{xdr} \sim \Omega \lambda^2 x_T / F$.
- При малой добротности резонатора ($\mu/\eta \gg \Omega$) дрейф ВТГ, определяемый изменениями x_T : $\Omega_{xdr} \sim \mu \lambda^2 x_T / (F\eta)$
- Зависимость угловой скорости дрейфа от технологических погрешностей демпфирования μ_T и частоты колебаний λ_T носят более сложный характер.



Аналитические и количественные оценки особенностей и технологических погрешностей ВТГ

Частное решение возмущенной системы уравнений (2.28),(2.29), определяющее вынужденные колебания:

$$\begin{aligned} x &= D_0 + D_1 \cos \lambda t + D_2 \sin \lambda t \\ y &= E_0 + E_1 \cos \lambda t + E_2 \sin \lambda t \end{aligned} \quad (2.34)$$

Система алгебраических уравнений для постоянных $D_0, D_1, D_2, E_0, E_1, E_2$, при наличии технологических погрешностей $\mu_T \neq 0, \lambda_T \neq 0, x_T \neq 0, y_T \neq 0$:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \lambda^2)D_1 + \mu_* \lambda D_2 + 2\eta \Omega \lambda E_2 = 0, \\ (\omega^2 - \lambda^2)D_2 - \mu_* \lambda D_1 - 2\eta \Omega \lambda E_1 = F, \\ (\omega^2 - \lambda^2)E_1 + \mu_* \lambda E_2 - 2\eta \Omega \lambda D_2 = F, \\ (\omega^2 - \lambda^2)E_2 - \mu_* \lambda E_1 + 2\eta \Omega \lambda D_1 = 0, \\ D_0 = -x_T \quad E_0 = -y_T \end{cases} \quad (2.35)$$

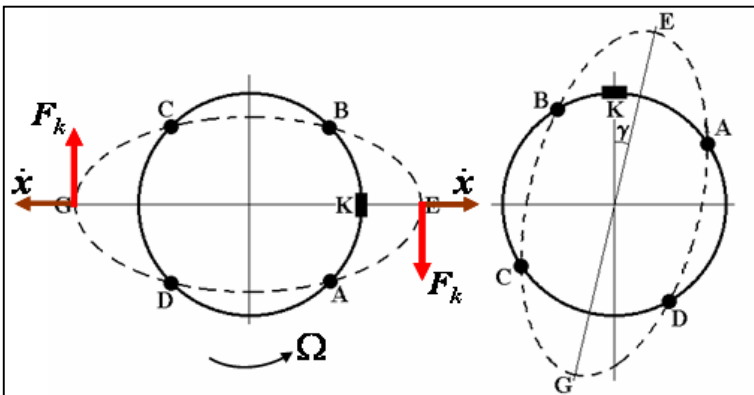
Система алгебраических уравнений для $D_0, D_1, D_2, E_0, E_1, E_2$ при отсутствии технологических погрешностей $\mu_T = 0, \lambda_T = 0, x_T = 0, y_T = 0$, т.е. $\omega = \lambda, \mu^* = \mu$ (“идеальный” ВТГ)

$$\begin{cases} \mu D_2 + 2\eta \Omega E_2 = 0, \\ \mu \lambda D_1 + 2\eta \Omega \lambda E_1 = -F, \\ \mu \lambda E_2 - 2\eta \Omega \lambda D_2 = F, \\ \mu_* E_1 - 2\eta \Omega D_1 = 0, \\ D_0 = 0 \quad E_0 = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Решение (2.36) для “идеального” (без погрешностей) ВТГ

$$x = A \sin(\lambda t + \delta) \quad y = A \sin(\lambda t + \varepsilon) \quad (2.37)$$

$$A = \frac{F}{\lambda \sqrt{\mu^2 + 4\eta^2 \Omega^2}} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\mu}{2\eta \Omega} \quad \operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{2\eta \Omega}{\mu}$$



- Амплитуда вынужденных колебаний резонатора зависит от измеряемой угловой скорости Ω .
- С увеличением Ω амплитуда вынужденных колебаний уменьшается, происходит “отставание” стоячей волны от движения резонатора.

Решение (2.35) для
ВТГ с погрешностями

$$x = A_T \sin(\lambda t + \delta_T) - x_T \quad y = A_T \sin(\lambda t + \varepsilon_T) - y_T \quad (2.38)$$

$$A_T = \sqrt{D_T^2 + E_T^2}$$

$$\operatorname{tg} \delta_T = \frac{D_T}{E_T}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_T = -\frac{E_T}{D_T}$$

$$D_T = \Delta_1 / \Delta$$

$$E_T = \Delta_2 / \Delta$$

$$\Delta = a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2 + b^4 - 2b^2 + 1$$

$$\Delta_1 = -\frac{F(a^3 + ab^2 + 2ab + a)}{\omega^2 - \lambda^2}$$

$$\Delta_2 = \frac{F(-a^2b + a^2 - b^3 - b^2 + b + 1)}{\omega^2 - \lambda^2}$$

$$a = \frac{(\mu + \mu_T)\lambda}{\omega^2 - \lambda^2}$$

$$b = \frac{2\eta\Omega\lambda}{\omega^2 - \lambda^2}$$

Погрешности ВТГ

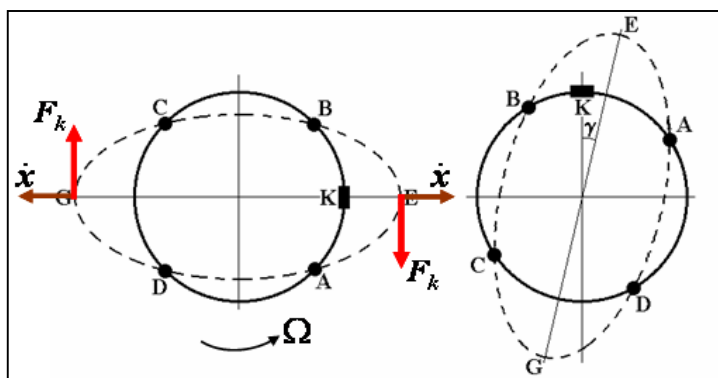
по амплитуде (в %)
и фазе (в угловых градусах)

$$p_{xA} = \frac{A - A_T + x_T}{A} 100\%$$

$$p_{yA} = \frac{A - A_T + y_T}{A} 100\% \quad (2.39)$$

$$p_\delta = \delta_T - \delta$$

$$p_\varepsilon = \varepsilon_T - \varepsilon$$



• Для получения **количественных оценок** параметров дрейфа ВТГ численно интегрируется система возмущенных уравнений (2.28), (2.29) с учетом (2.30) и используются полученные формулы (2.33), (2.37) - (2.39).

• Примем следующие основные задаваемые и варьируемые **исходные данные** возмущенных уравнений ВТГ (2.28), (2.29):

$$F = 10^4 \text{ м/с}^2, \quad \lambda = 17584 \text{ с}^{-1}, \quad \eta = 10^3, \quad \mu = 0 \div 10^4 \text{ с}^{-1}, \quad \Omega = 0,25 \div 4 \text{ с}^{-1}. \quad (2.40)$$