

2.6. Практические и учебно-исследовательские задачи для лазерных и волоконно-оптических гироскопов с использованием компьютерной модели

Краткие сведения по теории

- В **лазерном или волоконно-оптическом гироскопе (ЛГ, ВОГ, интерферометр Саньяка)** реализована идея использования оптических явлений для получения инерциальной информации [1-3,26-28].

- **Принцип действия ЛГ и ВОГ** основан на эффекте Саньяка (1913).

В замкнутом оптическом контуре в противоположных направлениях распространяются два световых луча (рис.2.32). При неподвижном контуре разность фаз обоих лучей, прошедших весь контур, равна нулю. При вращении контура вокруг оси, нормальной к его плоскости, фазовые набегі лучей неодинаковы, и разность фаз лучей пропорциональна угловой скорости Ω вращения.

- **Основное преимущество ВОГ** над ЛГ: величина масштабного коэффициента в ВОГ существенно больше, чем в ЛГ, за счет большой длины волоконной нити (длина волокна 1-2 км), т. е. ВОГ – прибор, более чувствительный к измеряемым параметрам.

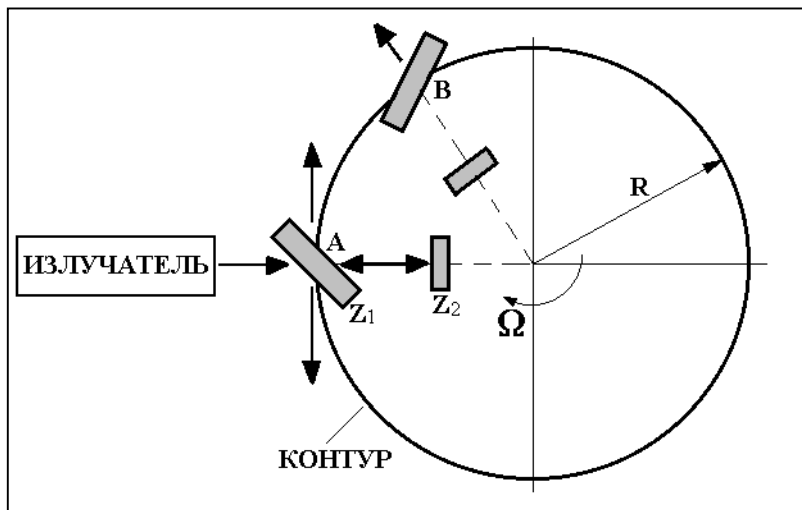


Рис.2.32. Эффект Саньяка в кольцевом оптическом контуре

- **Конструкция и математические модели лазерного и волоконно-оптического гироскопов**

- **Фаза Саньяка в ЛГ и ВОГ**

$$\Delta\varphi_C = \omega\Delta t = \frac{4\omega S}{c^2}\Omega = \frac{8\pi f S}{c^2}\Omega = \frac{8\pi S}{\lambda c}\Omega \quad (2.80)$$

$\lambda = c/f$ – длина волны; S – площадь контура
 $\omega[\text{с}^{-1}]$ – круговая частота, $f[\text{Гц}]$ – частота; $\omega=2\pi f$.

1. Кольцевой лазерный гироскоп (КЛГ) - активный интерферометр, в котором контур образован трубкой, заполненной активной газовой рабочей смесью гелия и неона, и системой зеркал, образующих замкнутый путь, рис.2.33.

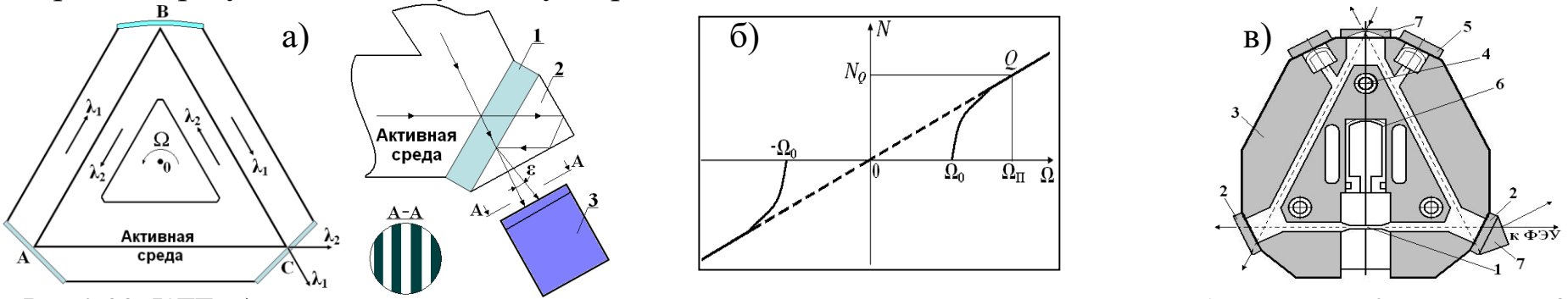


Рис.2.33. КЛГ: а) схемы активного интерферометра и совмещения волн на его выходе 1–зеркало; 2 – призма; 3 – фотоэлектронный умножитель (ФЭУ); б) частотная характеристика ЛГ; в) конструктивная схема ЧЭ КЛГ 1– диафрагма; 2–зеркала; 3- оптический канал с активной средой; 4– установочные элементы; 5- анод; 6– катод; 7– совмещающая призма; ФЭУ, устройство обработки информации

• **Разность частот в КЛГ**
 L_0 - периметр

$$\Delta f = f_1 - f_2 = \frac{4S}{\lambda L_0} \Omega \quad (2.81)$$

2. ВОГ: замкнутый контур образован многовитковой катушкой световолокна, рис.2.34

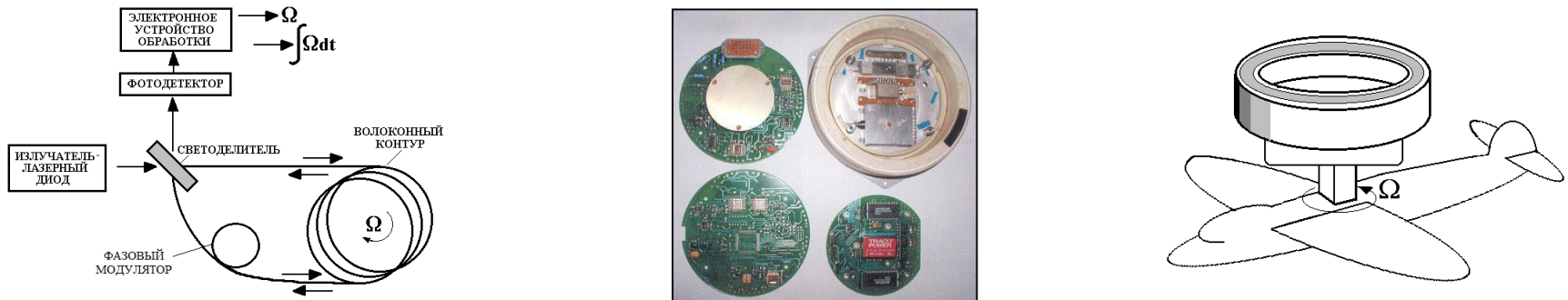


Рис.2.34. Волоконно-оптический гироскоп, его характеристики и элементы

• **Фаза Саньяка в ВОГ**

R – средний радиус витка, L – длина волокна,
 N – число витков, S_v – средняя площадь витка.

$$\Delta \varphi_c = \frac{4\pi RL}{\lambda_c} \Omega = \frac{8\pi NS_v}{\lambda_c} \Omega \quad (2.82)$$

Погрешности ВОГ за счет термически индуцированной невязимности (эффект Schupe)

Анализ погрешностей [1-3,29] ВОГ выявил один из основных источников **теплового дрейфа** - невязимность фаз встречно бегущих волн (**эффект Schupe**), вызванная нестационарными температурными градиентами вдоль волокна. Невязимность возникает, если волновые фронты двух противоположно бегущих лучей проходят одну и ту же область волокна за различное время.

• Исходные положения и формула для теплового дрейфа Schupe

- В диапазоне $(-50 \div +50)^\circ\text{C}$ температур зависимость показателя преломления от температуры:

$$n_1 = n_{10} + h_T T(\xi, t), \quad (2.83)$$

- Нестационарное температурное поле** ВОГ представляется в виде:

$$T(\xi, t) = T^0 \cdot f_1(t) \cdot f_2(\xi), \quad (2.84)$$

- Безразмерная функция $f_2(\xi)$ в виде **ряда Фурье**:

$$0 \leq \xi \leq 2\ell = L$$

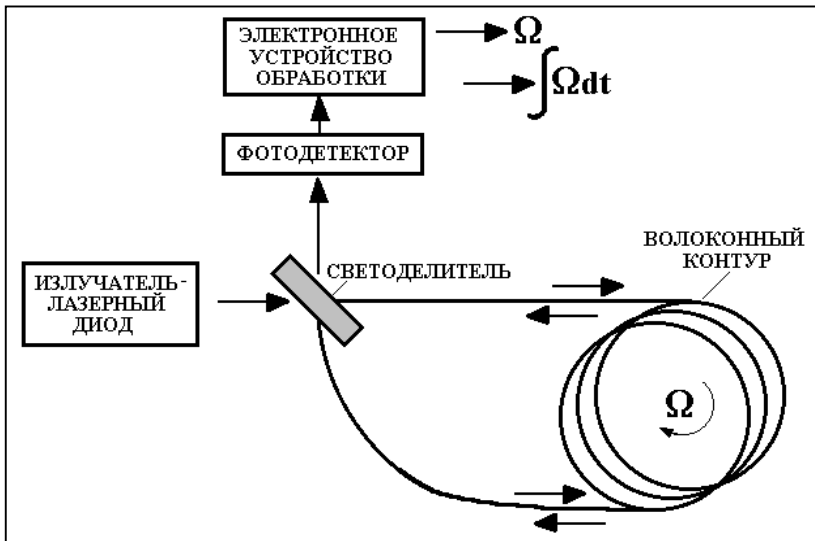
$$f_2(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos \frac{i\pi\xi}{\ell} + b_i \sin \frac{i\pi\xi}{\ell} \quad (2.85)$$

$$a_i = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f_2(\xi) \cos \frac{i\pi\xi}{\ell} d\xi \quad b_i = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f_2(\xi) \sin \frac{i\pi\xi}{\ell} d\xi \quad (2.86)$$

- Согласно [1-3,29], формула для угловой скорости дрейфа, составляющая основу математической модели **теплового дрейфа Schupe**:

$$\Omega_T(t) = -T^0 \frac{L}{2\pi R} \dot{f}_1(t) (h_T + \alpha_T n_{10}) n_{10} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i} \quad (2.87)$$

R – средний радиус витка, L – длина волокна,
 α_T – КТЛР, T^0 – макс температурный перепад.



• Исследование построенных математических моделей ВОГ и его дрейфа представлено далее при решении учебно-исследовательской **задачи 2.12и**.

Ответы и решения

Практические задачи 1-го уровня сложности

Задачи для самостоятельного решения

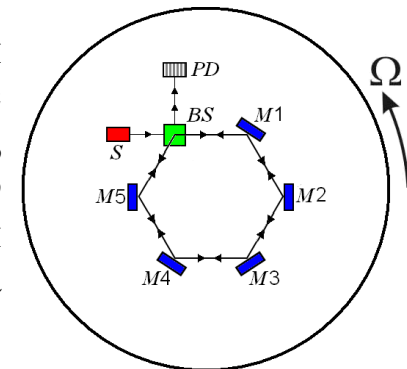
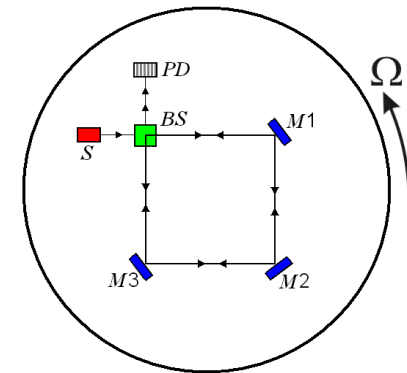
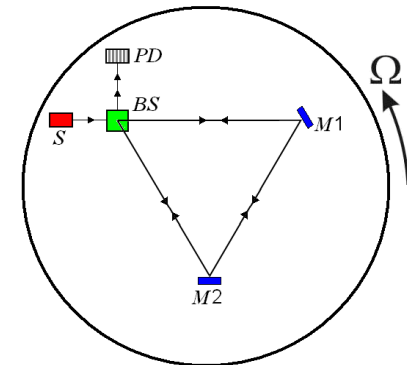
Задача 2.32. В интерферометре Саньяка, расположенном на вращающейся платформе, луч света от источника S с длиной волны λ разделяется с помощью делителя BS на два луча, которые с помощью зеркал $M1$, $M2$ направляются навстречу друг другу по сторонам **правильного треугольника** с периметром L . **Определить** по формуле (2.80) величину фазового сдвига Саньяка $\Delta\varphi$, возникающего между интерферирующими волнами на выходе PD интерферометра, при вращении платформы с угловой скоростью Ω .

S – площадь контура

$$\Delta\varphi_C = \frac{8\pi S}{\lambda c} \Omega \quad (2.80)$$

Задача 2.33.[31]. В интерферометре Саньяка, расположенном на вращающейся платформе, луч света от источника S с длиной волны λ разделяется с помощью делителя BS на два луча, которые с помощью зеркал $M1$, $M2$, $M3$ направляются навстречу друг другу по сторонам **квадрата** с периметром L . **Определить** по формуле (2.80) величину фазового сдвига Саньяка $\Delta\varphi$, возникающего между интерферирующими волнами на выходе PD интерферометра, при вращении платформы с угловой скоростью Ω .

Задача 2.34. В интерферометре Саньяка, расположенном на вращающейся платформе, луч света от источника S с длиной волны λ разделяется с помощью делителя BS на два луча, которые с помощью зеркал $M1$, $M2$, $M3$, $M4$, $M5$ направляются навстречу друг другу по сторонам **правильного шестиугольника** с периметром L . **Определить** по формуле (2.80) фазовый сдвиг Саньяка $\Delta\varphi$, возникающий между интерферирующими волнами на выходе PD интерферометра, при вращении платформы с угловой скоростью Ω .

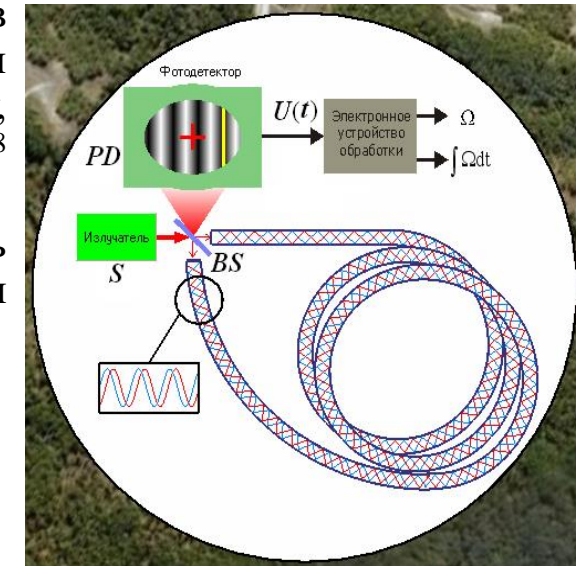


Задача 2.35. ВОГ расположен на платформе. Платформа вращается с угловой скоростью $\Omega = 1\text{с}^{-1} = \text{const}$. Свет с длиной волны $\lambda = 0,63\text{ мкм}$ от светодиода S вводится в волокно, разделяется в разветвителе BS на две волны, которые распространяются навстречу друг другу с разных концов волокна, возвращаются к разветвителю BS и складываются в выходной волоконной ветви, а затем на фотоприемнике PD . Общая длина волокна $L=1000\text{ м}$. Оно уложено на катушке в кольцевую бухту, средний диаметр которой $D = 0,1\text{ м}$. Скорость света принять $c = 3 \cdot 10^8\text{ м/с}$.

Определить аналитически и численно в долях π , пользуясь формулами (2.82), (2.93), фазу Саньяка $\Delta\varphi$ между интерферирующими волнами на выходе гироскопа.

$$\Delta\varphi_C = \frac{4\pi RL}{\lambda c} \Omega = \frac{8\pi NS_e}{\lambda c} \Omega \quad (2.82)$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \varepsilon t \quad (2.93)$$



К задачам 2.35, 2.36

Задача 2.36. [31]. Волоконно-оптический гироскоп расположен на платформе. Платформа начинает вращение из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = \text{const} = 0,01\text{с}^{-2}$. Свет с длиной волны $\lambda = 0,63\text{ мкм}$ от источника S вводится в волокно, разделяется в разветвителе BS на две волны, которые распространяются навстречу друг другу с разных концов волокна длиной $L=1000\text{ м}$. Пройдя волокно, уложенное в бухту из $N = 3185$ кольцевых витков, волны возвращаются к разветвителю BS и складываются в выходной волоконной ветви, а затем на фотоприемнике PD . С помощью этого фотоприемника регистрируется сигнал интерференции $U(t)$. Скорость света принять равной $c = 3 \cdot 10^8\text{ м/с}$.

Определить аналитически, и численно в долях π , пользуясь формулами (2.82), (2.83), период T интерференционного сигнала при фазе Саньяка $\Delta\varphi = 2\pi\text{ рад}$.

Задача 2.37. Основные соотношения для оптических гироскопов, основанных на эффекте Саньяка, это разность времени прохождения лучей

$$\Delta t = \frac{4\pi R^2}{c^2} \Omega = \frac{4S}{c^2} \Omega$$

и следующая из нее фаза Саньяка

$$\Delta \varphi = \omega \Delta t = \frac{4\omega S}{c^2} \Omega = \frac{8\pi f S}{c^2} \Omega = \frac{8\pi S}{\lambda c} \Omega$$

В этих формулах масштабные коэффициенты $K_{\Delta t}$, $K_{\Delta \varphi}$ между измеряемой угловой скоростью Ω и выходной характеристикой Δt или $\Delta \varphi$ **не зависят от показателя преломления n среды**, в которой распространяется свет.

Доказать, пользуясь нижеследующим указанием, что это утверждение справедливо.

Указание. Для доказательства воспользоваться следующими предположениями, положениями и формулами теории волновой оптики [30,31]. Рассматривается кольцевой оптический контур радиуса R , вращающийся с угловой скоростью Ω относительно инерциального пространства.

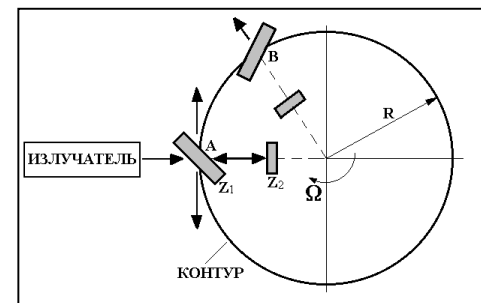
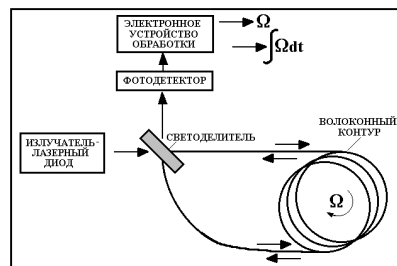
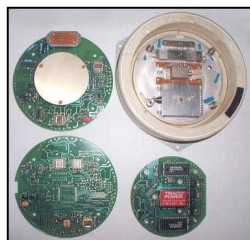
Пути встречно движущихся лучей записываются в виде $V_+ t_+ = 2\pi R + R\Omega t_+$, $V_- t_- = 2\pi R - R\Omega t_-$, где V_+ , t_+ - скорость и время распространения света в среде с показателем преломления n в направлении вращения оптического контура; V_- , t_- - скорость и время распространения света в той же среде против направлении вращения оптического контура.

Зависимости скоростей распространения света в среде от показателя преломления имеют вид:

$$V_+ = c/n + R\Omega(1-1/n^2), \quad V_- = c/n - R\Omega(1-1/n^2),$$

где c - скорость света в вакууме; $(1-1/n^2)$ - коэффициент увлечения (drag coefficient), экспериментально определенный в опыте **Физо** с движущейся жидкостью в кольцевом интерферометре и обоснованный в специальной теории относительности.

На основе первых двух формул составить $\Delta t = t_+ - t_-$ и преобразовать полученное выражение с учетом вторых двух формул и того, что $c \gg R\Omega$.



Учебно - исследовательская задача 2-го уровня сложности

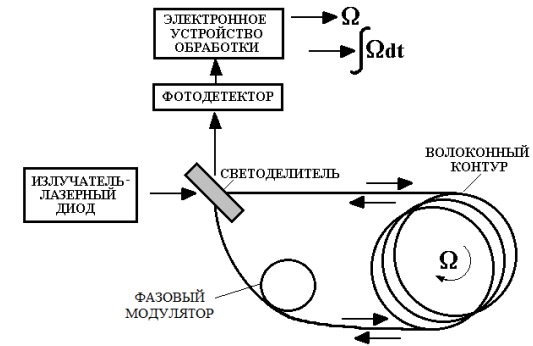
Задача 2.12и. Провести аналитическое и численное исследование **волоконно-оптического гироскопа** (рис.2.3).

Часть А.

Используя математические модели (2.82)-(2.87) провести анализ ВОГ, выявить его основные особенности, провести качественную и количественную оценку термически индуцированной погрешности гироскопа (дрейф Schupe).

Часть Б.

Провести численные компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации "VOG", подтвердить полученные аналитические результаты.



Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.12и

Часть А.

Основное соотношение (2.82) показывает, что фаза Саньяка пропорциональна измеряемой угловой скорости подвижного объекта:

$$\Delta\varphi_c = \frac{4\pi RL}{\lambda c} \Omega = \frac{8\pi NS_g}{\lambda c} \Omega$$

Анализ соотношений (2.83) - (2.87) для дрейфа Schupe.

- Термически индуцированный дрейф ВОГ имеет место при **нестационарной** температуре.
- В (2.87) входят только коэффициенты b_i рядов Фурье, "отвечающие" за **нечетность** функции температуры $f_2(\xi)$ по длине волокна ξ . Если $f_2(\xi)$ четная по ξ (симметричной относительно оси перпендикулярной продольной оси волокна и проходящей через его центр), то **дрейф минимален**.
- **Особенность** реальных конструкций ВОГ - волокно наматывается на катушку в виде бухты.

Влияние температурных перепадов по цилиндрическим координатам r , φ , z проявляется при этом в том, что волокно прогревается **периодически неравномерно** на различных участках. Имеют место **"тепловые полосы"** различной структуры по длине волокна, которые по-разному влияют на тепловой дрейф ВОГ.

- В [1-3,30] показано, что наиболее неблагоприятными, с точки зрения влияния на тепловой дрейф ВОГ, являются **нестационарные температурные перепады** по радиусу цилиндрической бухты.

$$\Omega_T(t) = -T^0 \frac{L}{2\pi R} \dot{f}_1(t) (h_T + \alpha_T n_{10}) n_{10} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i}$$

Рассмотрим конкретные виды безразмерных функций $f_1(t)$, $f_2(\xi)$

$$f_1(t) = At + B(1 - e^{-\gamma t}) + C \sin \omega t$$

$$\dot{f}_1(t) = A + B\gamma e^{-\gamma t} + C\omega \cos \omega t \quad (2.88)$$

1. Пусть температура изменяется вдоль волокна **по линейному** закону

$$0 \leq \xi \leq 2\ell = L \quad f_2(\xi) = \xi/L \quad (2.89)$$

Коэффициенты ряда Фурье для этой

функции, вычисленные по (2.86), и $\sum b_i/i$

$$b_i = -\frac{1}{i\pi}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i} = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi}{6} \quad (2.90)$$

2. Пусть температура изменяется вдоль волокна **по гармоническому** закону, как нечетная функция координаты ξ

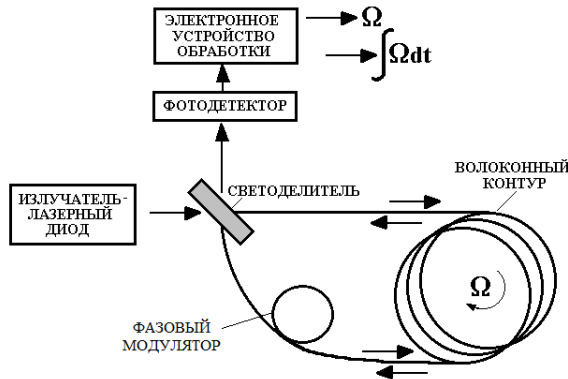
$$f_2(\xi) = \sin(n\xi/\ell) \quad (2.91)$$

Выражение

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i} = \frac{1}{n} \quad (2.92)$$

Измеряемая угловая скорость
подвижного объекта:

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \varepsilon t \quad (2.93)$$



Исходные данные для моделей ВОГ (2.82) - (2.93):

- параметры движения объекта $\Omega_0 = 0 \div 1 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon = 0 \div 0,1 \text{ с}^{-2}$;

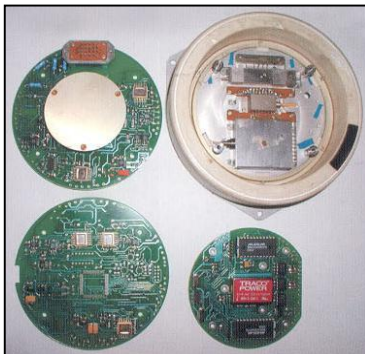
- параметры температурных возмущений

$T^0 = 0 \div 100 \text{ } ^\circ\text{C}$; $A, B, C = 0 \div 1$; $\gamma = 0,001 \div 0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega = 0,001 \div 0,1 \text{ с}^{-1}$;

- характеристики волокна и излучения

$h_T = (-1 \div +2) \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; $\alpha_T = (2 \div 5) \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; $n_{10} = (1,4 \div 1,5)$;

$L = (100 \div 1500) \text{ м}$; $R = (0,04 \div 0,1) \text{ м}$; $\lambda = (0,63 \div 1,55) \text{ мкм}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.



Задания для самостоятельной работы

Исследовать, с помощью программы динамической визуализации "VOG", влияние различных факторов на функционирование волоконно-оптического гироскопа.

А, именно:

1. Влияние на фазу Саньяка измерения постоянной и переменной угловой скорости подвижного объекта.

2. Влияние на фазу Саньяка геометрических параметров L , R волокна, длины волны λ излучения.

3. Исследование термически индуцированного дрейфа ВОГ:

- при различных зависимостях $f_2(\xi)$ температурных полей в волокне;

- при различных законах $f_1(t)$ (линейном, экспоненциальном, гармоническом) изменения температуры в волокне;

- при различных температурных, геометрических и других характеристиках волоконного контура.

