

# Глава 1

## Физическая природа гироскопических явлений, “классические” двух- и трехстепенные гироскопы с быстро вращающимся ротором

### 1.1. Гироскопический момент в гироскопах с быстро вращающимся ротором, гироскопы Лагранжа, Эйлера

#### Краткие сведения по теории

Физическая природа гироскопических явлений - действие Кориолисовых сил инерции на гироскоп с кинетическим моментом  $\mathbf{H}$  при наличии угловой скорости  $\omega_e$  (рис.1.1)

#### Гироскопический момент

$$\bar{\mathbf{M}}_G = [\bar{\mathbf{H}} \times \bar{\omega}_e] \quad (1.1)$$

Угловая скорость прецессии (или другие параметры) может быть найдена из условия равенства  $M_G$  и момента внешних сил  $M$

$$M_G = H\omega_e \sin \theta \quad (1.2)$$

$$M_G = M \quad (1.3)$$

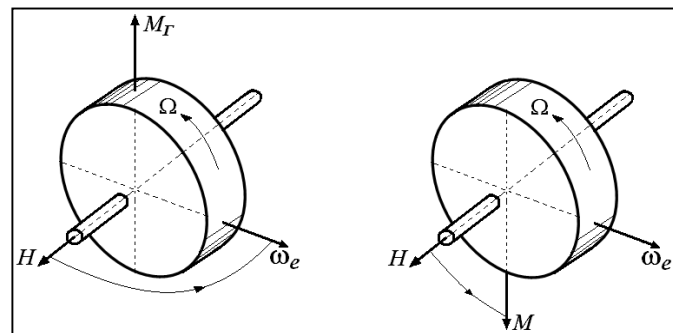


Рис.1.1. Направление действия  $M_G$  и направление прецессии гироскопа

- **Тяжелый гироскоп (Лагранжа)** - трехстепенной гироскоп, закрепленный в неподвижной точке (рис.1.2), центр масс  $\mathbf{z}_C$  или  $\mathbf{y}_C$  которого смещен относительно точки подвеса по главной оси

- **Астатический гироскоп (Эйлера)** - трехстепенной гироскоп, закрепленный в неподвижной точке (рис.1.2), центр масс которого совпадает с точкой подвеса,  $\mathbf{z}_C = 0$ ,  $\mathbf{y}_C = 0$ .

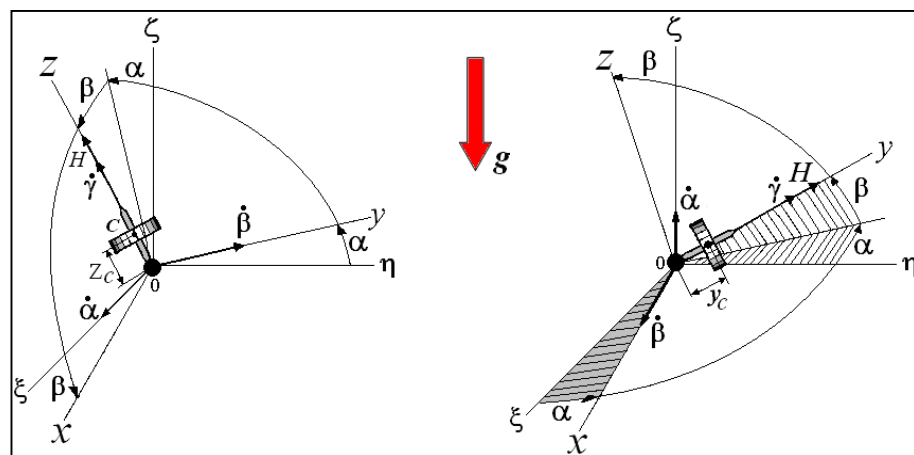


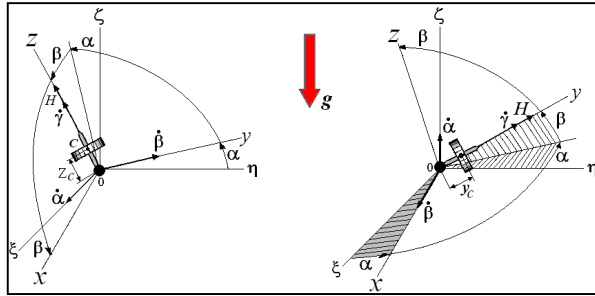
Рис.1.2. Гироскоп Лагранжа ( $z_C \neq 0$ ,  $y_C \neq 0$ ) и гироскоп Эйлера ( $z_C = 0$ ,  $y_C = 0$ ) при базовом вертикальном и горизонтальном положении оси гироскопа

# Кинетическая энергия гироскопа Лагранжа или Эйлера с базовой вертикальной (горизонтальной) ориентацией оси вращения (рис.1.2)

$$E = A \cos^2 \beta \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + A \frac{\dot{\beta}^2}{2} + \frac{1}{2} C(B)(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 \quad (1.4)$$

$A = B, C$  или  $A = C, B$  – моменты инерции гироскопа  
с базовой **вертикальной (горизонтальной)**  
ориентацией оси вращения

## Обобщенные силы



Базовое положение  
оси *вертикально*

$$Q_\alpha = -\mu_\alpha \dot{\alpha} + mgz_C \sin \alpha \cos \beta + Mom_2 \cos \omega_2 t \quad (1.5)$$

$$Q_\beta = -\mu_\beta \dot{\beta} + mgz_C \sin \beta \cos \alpha + Mom_1 \cos \omega_1 t, \quad (1.6)$$

Базовое положение  
оси *горизонтально*

$$Q_\alpha = -\mu_\alpha \dot{\alpha} + Mom_2 \cos \omega_2 t \quad (1.7)$$

$$Q_\beta = -\mu_\beta \dot{\beta} - mgy_C \cos \alpha \cos \beta + Mom_1 \cos \omega_1 t, \quad (1.8)$$

## Уравнения движения гироскопа Лагранжа

Базовое положение  
оси *вертикально*

$$A\ddot{\alpha} \cos^2 \beta + \mu_\alpha \dot{\alpha} - A\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin 2\beta + H\dot{\beta} \cos \beta = mgz_C \sin \alpha \cos \beta + Mom_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.9)$$

$$A\ddot{\beta} + \mu_\beta \dot{\beta} + A\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H\dot{\alpha} \cos \beta = mgz_C \sin \beta \cos \alpha + Mom_1 \cos \omega_1 t, \quad (1.10)$$

$$H = C(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) = const$$

Базовое положение  
оси *горизонтально*

$$A\ddot{\alpha} \cos^2 \beta + \mu_\alpha \dot{\alpha} - A\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin 2\beta + H\dot{\beta} \cos \beta = Mom_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.11)$$

$$A\ddot{\beta} + \mu_\beta \dot{\beta} + A\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H\dot{\alpha} \cos \beta = -mgy_C \cos \alpha \cos \beta + Mom_1 \cos \omega_1 t, \quad (1.12)$$

$$H = B(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) = const$$

Коэффициент демпфирования

$$\mu_{(\alpha, \beta)} = \mu_{0(\alpha, \beta)} + 0,5(\mu_{\max} + \mu_{\min}) + 0,5(\mu_{\max} - \mu_{\min}) \cos p_D t \quad (1.13)$$

## Уравнения движения гироскопа Эйлера

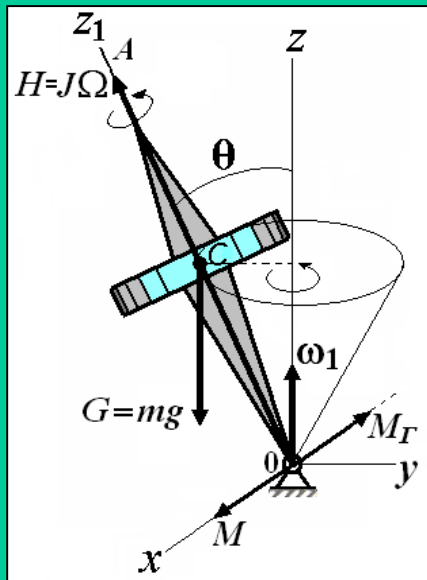
$$A\ddot{\alpha} \cos^2 \beta + \mu_\alpha \dot{\alpha} - A\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin 2\beta + H\dot{\beta} \cos \beta = Mom_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.14)$$

$$A\ddot{\beta} + \mu_\beta \dot{\beta} + A\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H\dot{\alpha} \cos \beta = Mom_1 \cos \omega_1 t, \quad (1.15)$$

*вертикаль*  $H = C(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) = const$       *горизонт*  $H = B(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) = const$

## Практические задачи 1-го уровня сложности

**Пример.** Волчок массы  $m = 1$  кг вращается против часовой стрелки вокруг своей оси  $OA$  с постоянной угловой скоростью  $\Omega = 200 \text{ с}^{-1}$ . Ось  $OA$  наклонена к вертикали под углом  $\theta$ . Точка  $O$  неподвижна. Центр масс  $C$  волчка находится на оси  $OA$  на расстоянии  $OC = a = 0,01$  м. Момент инерции волчка относительно оси  $OA$  равен  $J = 0,005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ . Определить **движение, модуль и направление** угловой скорости  $\omega_1$  оси  $OA$ , полагая ускорение силы тяжести равным  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ .



### Пример решения практической задачи

Направление момента  $M$  внешних сил показано на рисунке. Модуль момента внешних сил:

$$M = mga \sin \theta.$$

Направление гироскопического момента определяется согласно (1.1) и показано на рисунке.

Модуль гироскопического момента по (1.2):

$$M_G = H\omega_1 \sin \theta, \text{ где кинетический момент гироскопа } H = J\Omega.$$

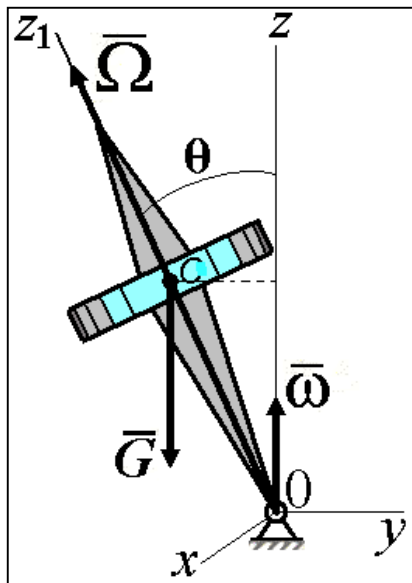
Из условия (1.3) равенства момента внешних сил и гироскопического момента  $M = M_G$  получим:

$$mga \sin \theta = J\Omega\omega_1 \sin \theta \Rightarrow \omega_1 = \frac{mga}{J\Omega} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0,01}{0,005 \cdot 200} = 0,1 \text{ с}^{-1}$$

**Ответ.** Ось гироскопа вращается вокруг вертикали  $Oz$  против часовой стрелки, описывая круговой конус с постоянной угловой скоростью  $\omega_1 = 0,1 \text{ с}^{-1}$ .

Вектор  $\omega_1$  направлен по  $Oz$ .

Это прецессионное вращение можно промоделировать с помощью программы динамической визуализации "Gyro-V", задав соответствующие параметры.



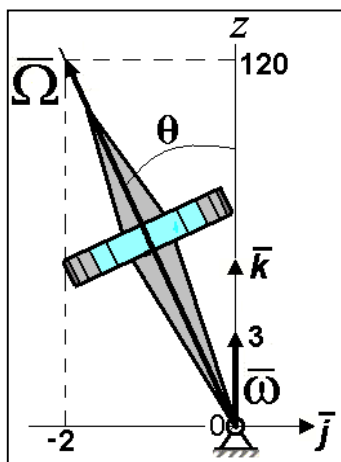
К задачам 1.1 - 1.3

**Задача 1.1.** Угловая скорость собственного вращения тяжелого гироскопа  $\Omega = 200 \text{ с}^{-1}$ . Вес  $G = 10 \text{ Н}$ . Момент инерции гироскопа относительно оси симметрии  $J = 0,005 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Расстояние  $OC = 0,04 \text{ м}$ . Определить *величину угловой скорости* прецессии  $\omega [\text{с}^{-1}]$ .

**Задача 1.2.** Угловая скорость прецессии тяжелого волчка  $\omega = 0,1 \text{ с}^{-1}$ . Вес волчка  $G = 1 \text{ Н}$ . Расстояние  $OC = 0,1 \text{ м}$ . Момент инерции волчка относительно оси симметрии  $J = 0,002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Определить *угловую скорость собственного вращения* волчка  $\Omega [\text{с}^{-1}]$ .

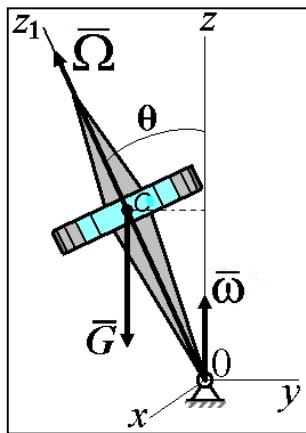
**Задача 1.3.** Прецессия тяжелого волчка происходит с угловой скоростью  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ . Угловая скорость собственного вращения волчка  $\Omega = 100 \text{ с}^{-1}$ .

Вес волчка  $G = 5000 \text{ Н}$ . Расстояние  $OC = 0,1 \text{ м}$ . Определить *момент инерции волчка относительно оси симметрии*  $J [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$ .



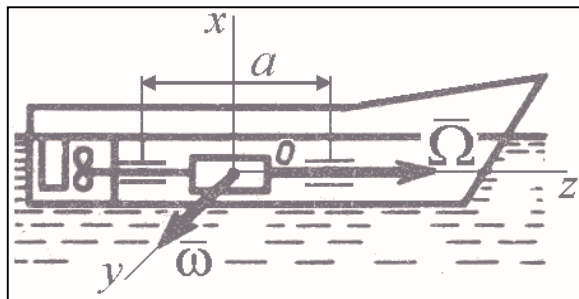
К задаче 1.4

**Задача 1.4.** При движении гироскопа вектор угловой скорости собственного вращения  $\bar{\Omega} = -2\bar{j} + 120\bar{k} [\text{с}^{-1}]$ . Вектор переносной угловой скорости прецессии  $\bar{\omega} = 3\bar{k}$ . Момент инерции гироскопа относительно оси симметрии  $J = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Определить, с точностью до целых, *модуль гироскопического момента*  $M_G [\text{Н} \cdot \text{м}]$ .



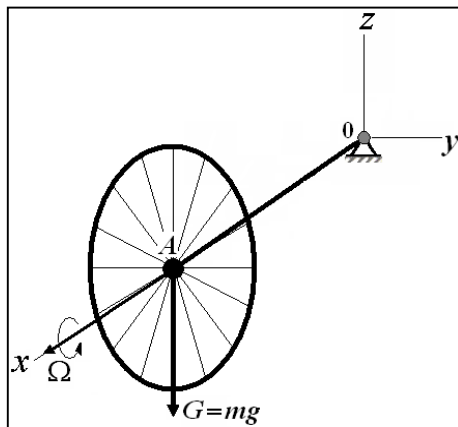
К задаче 1.5

**Задача 1.5.** Угловая скорость собственного вращения тяжелого (вес  $G$ ) гироскопа  $\Omega = 200 \text{ с}^{-1}$ . Угловая скорость прецессии  $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$ . Угол между векторами  $\Omega$  и  $\omega$   $\theta = 30^\circ$ . Момент инерции гироскопа относительно оси симметрии  $J = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Определить **модуль момента силы тяжести**  $M_G$  [Н·м].



К задаче 1.6

**Задача 1.6.** Винт и вал моторной лодки имеют момент инерции  $J = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Расстояние между подшипниками  $a = 0,8 \text{ м}$ . Угловая скорость вращения винта  $\Omega = 200 \text{ с}^{-1}$ . Имеет место качка лодки по дифференту с угловой скоростью  $\omega = 0,1 \sin t \text{ с}^{-1}$ . Определить **максимальную гироскопическую реакцию** на подшипники  $G^{\max}$  [Н].



К задаче 1.7

**Задача 1.7.** Колесо массы  $m = 1 \text{ кг}$  свободно насажено на ось  $OA$  длиной  $a = 0,01 \text{ м}$ . Момент инерции колеса относительно оси  $OA$  равен  $J = 0,01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ . Колесу сообщили вращение с постоянной угловой скоростью  $\Omega = 10 \text{ с}^{-1}$  вокруг этой оси, расположенной горизонтально. Точка  $O$  неподвижна. Определить **движение, модуль и направление угловой скорости**  $\omega_1$  оси  $OA$ , полагая ускорение силы тяжести равным  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ .

## Учебно - исследовательские задачи 2-го уровня сложности

**Задача 1.1и.** Провести аналитическое и численное исследование гироскопа Лагранжа ( $z_C \neq 0$ ) с базовой **вертикальной** ориентацией оси вращения (рис.1.2 левый):

### Часть А.

1. Вывести нелинейные уравнения вида (1.9),(1.10) движения гироскопа из уравнений Лагранжа 2-го рода. Кинетическая энергия и обобщенные силы (1.4) - (1.6).
2. Линеаризовать нелинейные уравнения для малых углов и их производных.
3. Получить линеаризованные уравнения при  $\mu_\alpha = \mu_\beta = 0$  и  $Mom_1 = Mom_2 = 0$ .
4. Получить, без учета инерционных членов, “прецессионные” уравнения гироскопа.
5. Получить уравнения малых колебаний физического сферического маятника при  $\mu_\alpha = \mu_\beta = 0$ ,  $Mom_1 = Mom_2 = 0$ , полагая  $H = 0$ .
6. Из “прецессионных” уравнений определить собственную частоту его малых колебаний.
7. Из уравнений малых колебаний маятника определить его собственную частоту колебаний.
8. Сравнить собственные частоты гироскопа Лагранжа и соответствующего ему маятника ( $H=0$ ).
9. Получить оценки собственных частот прецессионных и нутационных колебаний гироскопа из линеаризованных уравнений с учетом инерционных членов и при  $\mu_\alpha = \mu_\beta = 0$ ,  $Mom_1 = Mom_2 = 0$ .

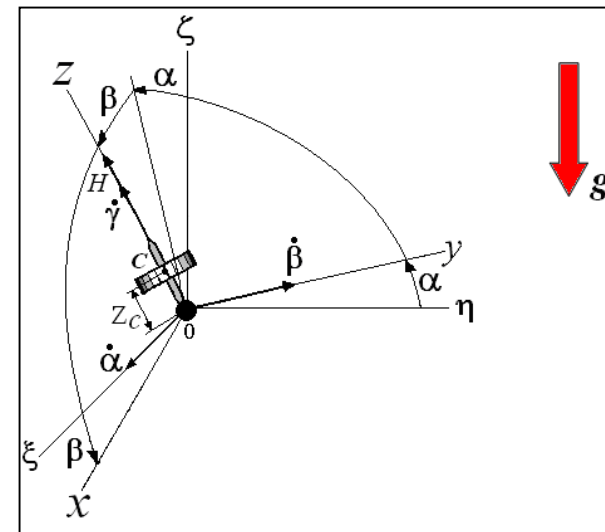
**Часть Б.** Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации “Gyro-V”, подтвердить полученные аналитические результаты.

**Дополнительно, по заданию преподавателя,** с помощью программы “Gyro-V”, исследовать влияние на движение гироскопа вязкого демпфирования, моментов гармонических внешних сил, вариаций начальных условий, кинетического момента и других параметров.

### Базовые исходные данные

$A=B=0,01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;  $m=1 \text{ кг}$ ;  $z_C=0,01 \text{ м}$ ;  $g=9,8 \approx 10 \text{ м/с}^2$ ;  $H \approx C\dot{\gamma} = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ;

Н. у.  $\alpha_0 = 0,1 \div 1 \text{ рад}$ ;  $\beta_0 = 0$ ;  $\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = 0$ ;  $\mu_\alpha, \mu_\beta = 0 \div 0,0005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ .

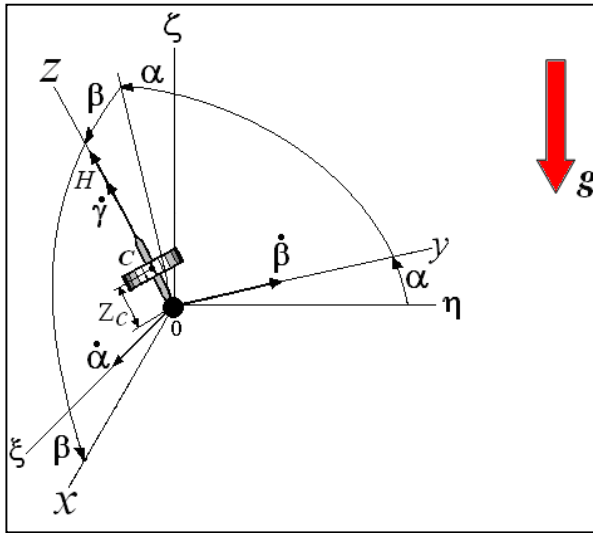




# Пример решения учебно-исследовательской задачи 1.1и

## Часть А.

### 1. Уравнения Лагранжа 2-го рода



Кинетическая энергия

Обобщенные силы

Формализм Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \alpha} = Q_{\alpha} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \beta} = Q_{\beta}$$

$$E = A \cos^2 \beta \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + A \frac{\dot{\beta}^2}{2} + \frac{1}{2} C (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2$$

$$Q_{\alpha} = -\mu_{\alpha} \dot{\alpha} + mgz_C \sin \alpha \cos \beta + Mom_2 \cos \omega_2 t$$

$$Q_{\beta} = -\mu_{\beta} \dot{\beta} + mgz_C \sin \beta \cos \alpha + Mom_1 \cos \omega_1 t$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} = A \dot{\alpha} \cos^2 \beta + C (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) \sin \beta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \ddot{\alpha} A \cos^2 \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} A \sin 2\beta + H \dot{\beta} \cos \beta$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\beta}} = A \dot{\beta} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\beta}} \right) = A \ddot{\beta} \quad \frac{\partial E}{\partial \beta} = -A \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + H \dot{\alpha} \cos \beta \quad \rightarrow$$

**Нелинейные уравнения** движения гироскопа Лагранжа (1.9), (1.10)

$$A \ddot{\alpha} \cos^2 \beta + \mu_{\alpha} \dot{\alpha} - A \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta + H \dot{\beta} \cos \beta = mgz_C \sin \alpha \cos \beta + Mom_2 \cos \omega_2 t,$$

$$A \ddot{\beta} + \mu_{\beta} \dot{\beta} + A \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - H \dot{\alpha} \cos \beta = mgz_C \sin \beta \cos \alpha + Mom_1 \cos \omega_1 t,$$

$$H = C (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) = const$$

### 2. Линеаризованные уравнения движения

### 3. Линеаризованные уравнения движения при $\mu_{\alpha} = \mu_{\beta} = 0$ и $Mom_1 = Mom_2 = 0$

### 4. Приближенные “прецессионные” уравнения движения

### 5. Уравнения малых колебаний сферического маятника ( $z_C < 0$ ) при $\mu_{\alpha} = \mu_{\beta} = 0$ и $Mom_1 = Mom_2 = 0$

$$A \ddot{\alpha} + \mu_{\alpha} \dot{\alpha} + H \dot{\beta} = mgz_C \alpha + Mom_2 \cos \omega_2 t, \quad (1.16)$$

$$A \ddot{\beta} + \mu_{\beta} \dot{\beta} - H \dot{\alpha} = mgz_C \beta + Mom_1 \cos \omega_1 t \quad (1.17)$$

$$A \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} = mgz_C \alpha, \quad (1.18)$$

$$A \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} = mgz_C \beta \quad (1.19)$$

$$H \dot{\beta} = mgz_C \alpha, \quad (1.20)$$

$$-H \dot{\alpha} = mgz_C \beta \quad (1.21)$$

$$A \ddot{\alpha} = mgz_C \alpha, \quad (1.22)$$

$$A \ddot{\beta} = mgz_C \beta \quad (1.23)$$

## 6. Частота малых собственных прецессионных колебаний гироскопа из (1.20), (1.21)

$$\ddot{\alpha} + k_{GL}^2 \alpha = 0 \qquad \ddot{\beta} + k_{GL}^2 \beta = 0$$

$$k_{GL} = mgz_C / H \quad (1.24)$$

## 7. Частота малых колебаний гироскопа сферического маятника из (1.22), (1.23)

$$\ddot{\alpha} + k_{\phi M}^2 \alpha = 0 \quad \ddot{\beta} + k_{\phi M}^2 \beta = 0$$

$$k_{\Phi M} = \sqrt{mgz_C/A} \quad (1.25)$$

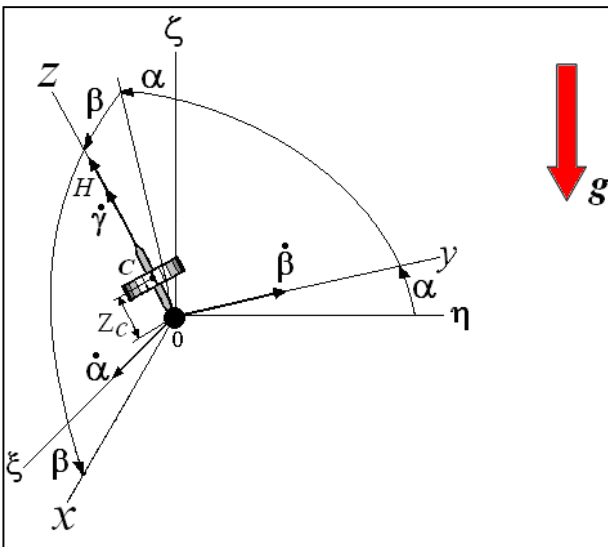
## 8. Сравнение собственных частот физического маятника и гироскопа Лагранжа

$$\chi = \frac{k_{\Phi M}}{k_{GL}} = \frac{H}{\sqrt{Amgz_C}} \quad (1.26)$$

## Выводы

- Для случая гироскопа Лагранжа с вертикальной базовой ориентацией оси собственного вращения и отсутствием вязкого демпфирования имеет место *прецессия* по углу  $\alpha$  и углу  $\beta$  частоты  $k_{GL}$ , определяемой приближенно по (1.24)

- Эта прецессия представляет собой “более медленное” движение по углам  $\alpha$  и  $\beta$  по сравнению с соответствующими колебаниями негироскопического тела (физического сферического маятника) под действием такого же момента сил тяжести.





**9.** Получение оценок собственных частот прецессионных и нутационных колебаний гироскопа из линеаризованных уравнений (1.18), (1.19) с учетом инерционных членов и при  $\mu_\alpha = \mu_\beta = 0$ ,  $Mom_1 = Mom_2 = 0$ .

Исходные уравнения (1.18), (1.19)  $A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} = mgz_c \alpha$ ,  $A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = mgz_c \beta$   
 Обозначим  $\ddot{\alpha} = \psi$   $\ddot{\beta} = \varphi$

Уравнение для определения собственных частот  $p_1, p_2$  колебаний:

$$\ddot{\psi} + \left( \frac{H^2}{A^2} - \frac{2mgz_c}{A} \right) \ddot{\alpha} + \left( \frac{mgz_c}{A} \right)^2 \alpha = 0, \quad (1.27)$$

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{H^2}{A^2} - \frac{2mgz_c}{A} \right) \ddot{\beta} + \left( \frac{mgz_c}{A} \right)^2 \beta = 0 \quad (1.28)$$

По теории механических колебаний, если система имеет вид,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j = 0 \quad (1.29)$$

то ее решение

$$x_i = u_i \sin(pt + \delta) \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.30)$$

где  $u_i$  - постоянные амплитуды;  $p, \delta$  - частота и фаза колебаний.

Подставляя (1.30) в (1.29), получим систему однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n (b_{ij} - a_{ij} p^2) u_j = 0 \quad (1.31)$$

Условие существования ненулевых решений (1.31)

$$\Delta(p^2) = \begin{vmatrix} b_{11} - a_{11}p^2 & \dots & b_{1n} - a_{1n}p^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} - a_{n1}p^2 & \dots & b_{nn} - a_{nn}p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.32)$$

Для (1.27), (1.28)  $n = 2$  и частотное уравнение (1.32) примет вид

$$\Delta(p^2) = \begin{vmatrix} -p^2 & \left[ \left( \frac{mgz_c}{A} \right)^2 - p^2 \left( \frac{H^2}{A^2} - \frac{2mgz_c}{A} \right) \right] \\ -1 & -p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^4 - \left( \frac{H^2}{A^2} - \frac{2mgz_c}{A} \right) p^2 + \left( \frac{mgz_c}{A} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

**• Частоты нутационных и прецессионных собственных малых колебаний**

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{H^2}{A^2} - \frac{2mgz_c}{A} \right) \pm \frac{H}{A} \sqrt{\frac{H^2}{A^2} - \frac{4mgz_c}{A}} \quad (1.33)$$

## Пример расчета

$$A = 0,01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \quad H = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; \quad m = 1 \text{ кг}; \quad z_C = 0,01 \text{ м}; \quad g \approx 10 \text{ м/с}^2.$$

**Собственная частота** малых прецессионных колебаний гироскопа по (1.24) для приближенных “прецессионных” уравнений движения

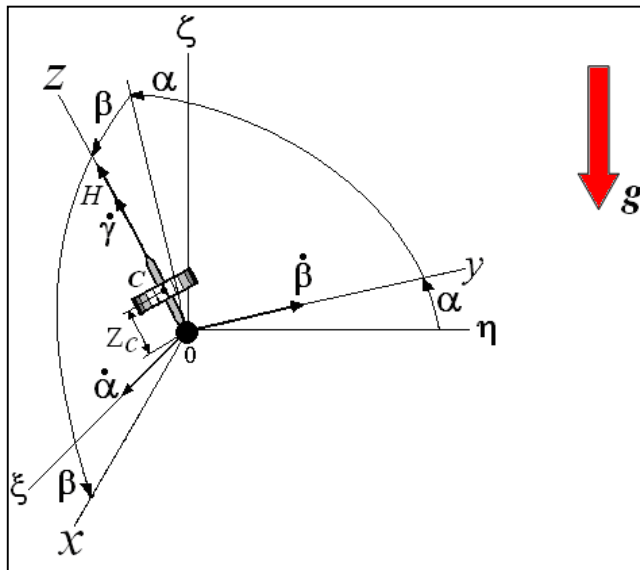
$$k_{GL} = \frac{mgz_C}{H} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0,01}{0,1} = 1 \text{ с}^{-1}$$

**Собственная частота** малых прецессионных колебаний гироскопа по (1.33) для более точных уравнений, учитывающих инерционных члены

$$p_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{H^2}{A^2} - \frac{2mgz_C}{A} \right)} - \frac{H}{A} \sqrt{\frac{H^2}{A^2} - \frac{4mgz_C}{A}} = 1,13 \text{ с}^{-1}$$

**Собственная частота** малых нутационных колебаний гироскопа по (1.33) для более точных уравнений, учитывающих инерционных члены

$$p_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{H^2}{A^2} - \frac{2mgz_C}{A} \right)} + \frac{H}{A} \sqrt{\frac{H^2}{A^2} - \frac{4mgz_C}{A}} = 8,87 \text{ с}^{-1}$$



## Выводы

- Учет инерционных членов в уравнениях движения гироскопа позволяет выявить более полную картину движения недемпфированного гироскопа Лагранжа с базовой вертикальной ориентацией оси вращения.
- При имеющемся начальном отклонении от вертикали ось гироскопа прецессирует с угловой скоростью  $p_2$  около вертикали, описывая круговой конус, и совершая более быстрые нутационные колебания с частотой  $p_1 > p_2$ .