

2.3. Практические и учебно-исследовательские задачи для электростатических сферических гироскопов с использованием компьютерной 3D модели

Краткие сведения по теории

• **Электростатический гироскоп с бесконтактным подвесом полого (ЭСГ) или сплошного (ЭСГС) сферического ротора** (рис.2.5, 2.6 [1]) состоит из быстровращающегося бериллиевого ротора 2 взвешенного в электростатическом поле электродов 3. Зазор между ротором и электродами десятки мкм, вакуум до 10^{-9} мм. рт. ст. Разгон ротора до десятков тысяч об/мин осуществляется двигателем 4. Система съема информации об угловом положении оси вращения ротора строится на основе оптических устройств 1 и маски на роторе.

• **Принцип действия** электростатического гироскопа основан на использовании закона Кулона о взаимодействии электрически заряженных тел. Подвешенный в электростатическом поле и раскрученный сферический ротор сохраняет ось вращения в инерциальном пространстве. Эти гироскопы - автономные построители опорных направлений.

Главные достоинства и особенности ЭСГ – практическое отсутствие трения, отсутствие дрейфов, обусловленных кинематическим взаимодействием рамок карданового подвеса и ротора и малая чувствительность к температурным воздействиям.

ЭСГ – свободный гироскоп и его выходная информация - углы между осью ротора и камерой.

Если ось вращения первоначально выставлена вертикально – ЭСГ основа гироскопической вертикали (ГВ). Если ось вращения горизонтальна - ЭСГ основа гироскопа направления (ГН).

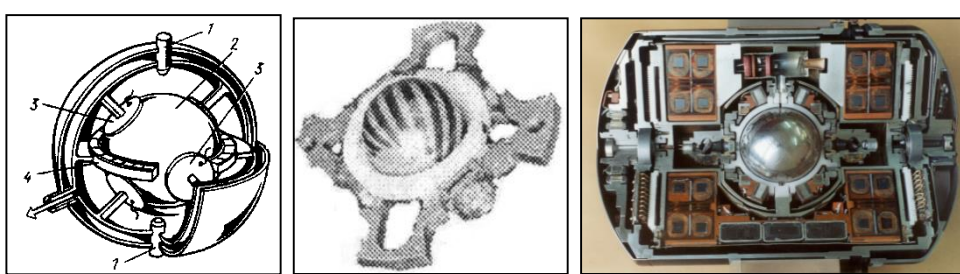


Рис.2.5. Схема и элементы конструкции ЭСГ:

1– оптические устройства; 2– ротор;

3– электроды; 4– двигатель

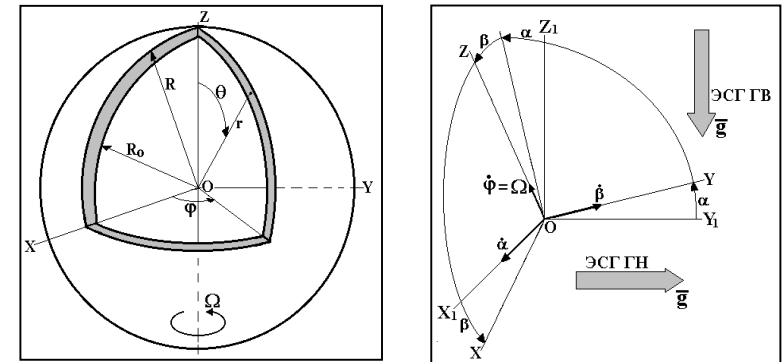


Рис.2.6. Ротор и система координат

• Построение и исследование уравнений движения (математических моделей) ЭСГ представлено далее при решении учебно-исследовательской **задачи 2.3и**.

Ответы и решения

Практические задачи 1-го уровня сложности

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.13. Пользуясь линеаризованными уравнениями движения ЭСГ

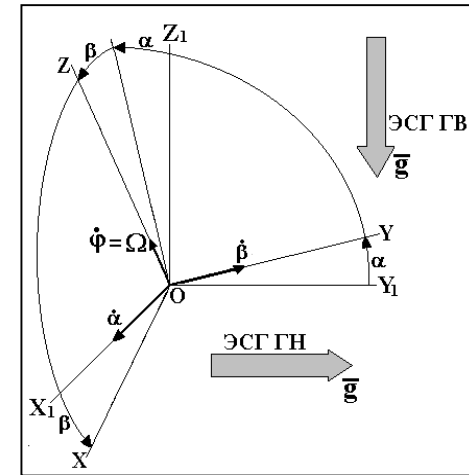
$$A_0 \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} = M_{\alpha} \cos \omega_{\alpha} t, \quad A_0 \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} = 0.$$

определить частоту k [Гц] собственных нутационных колебаний гироскопа с **полым** ротором при исходных данных: кинетический момент $H=0,025 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; момент инерции ротора $A_0=10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$.

Задача 2.14. Пользуясь линеаризованными уравнениями движения ЭСГ

$$A_0 \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} = M_{\alpha} \cos \omega_{\alpha} t, \quad A_0 \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} = 0.$$

определить частоту k [Гц] собственных нутационных колебаний гироскопа с **сплошным** ротором при исходных данных: кинетический момент $H=0,0002 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; момент инерции $A_0=1,3 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$.



Задача 2.15. Пользуясь линеаризованными уравнениями движения ЭСГ (ГН) с **полым** ротором

$$A_0 \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} = mgz_c, \quad A_0 \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} = 0$$

определить допустимое смещение центра масс ротора z_c [мкм] в поле ускорений g , вызывающее дрейф гироскопа $\dot{\beta} = 1 \text{ град/час}$.

Необходимые исходные данные: $H = 0,025 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $m = 0,015 \text{ кг}$; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Задача 2.16. Пользуясь линеаризованными уравнениями движения ЭСГ (ГН) с **сплошным** ротором

$$A_0 \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} = mgz_c, \quad A_0 \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} = 0$$

определить допустимое смещение центра масс ротора z_c [мкм] в поле ускорений g , вызывающее дрейф гироскопа $\dot{\beta} = 1 \text{ град/час}$.

Необходимые исходные данные: $H = 0,0002 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $m = 0,001 \text{ кг}$; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Учебно - исследовательская задача 2-го уровня сложности

Задача 2.1и. Провести аналитическое и численное исследование электростатического гироскопа (рис.2.6).

Часть А.

1. Вывести, на основе уравнений Лагранжа 2-го рода, нелинейные уравнения движения (построить математическую модель) электростатического гироскопа с вертикально или горизонтально выставленными осями вращения.

2. Получить и проанализировать линеаризованные уравнения движения ЭСГ.

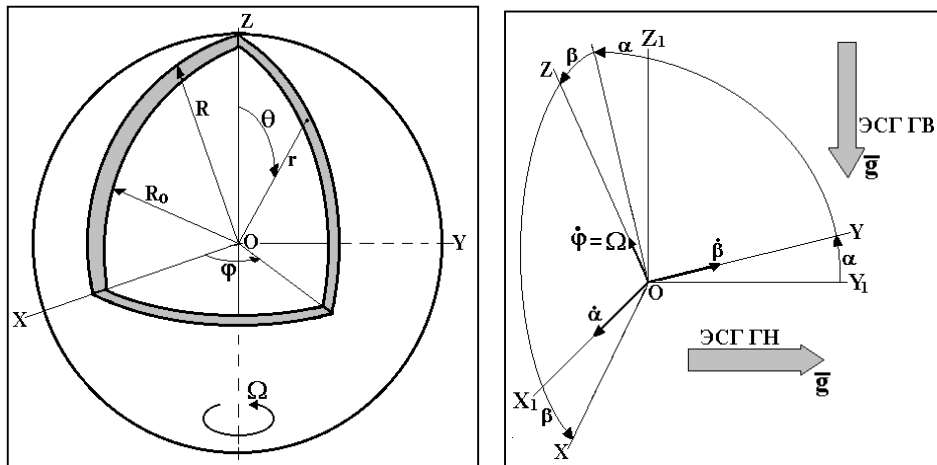
Выявить особенности ЭСГ.

Часть Б.

Провести компьютерные эксперименты с помощью программы численного решения и динамической визуализации "ESG", подтвердить полученные аналитические результаты.

Пример решения учебно-исследовательской задачи 2.1и

Часть А.



1. Исходные положения

Уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \alpha} = Q_{\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \beta} = Q_{\beta}, \quad (2.17)$$

Кинетическая энергия и обобщенная сила

$$E = \frac{A \dot{\alpha}^2}{2} \cos^2 \beta + \frac{B \dot{\beta}^2}{2} + \frac{C}{2} (\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\phi})^2 \quad (2.18)$$

$$\text{ГВ} \quad Q_{\alpha} = -\mu \dot{\alpha} + mgz_c \sin \alpha \cos \beta + M_{\alpha} \cos \omega_{\alpha} t \quad Q_{\beta} = -\mu \dot{\beta} + mgz_c \cos \alpha \sin \beta + M_{\beta} \cos \omega_{\beta} t \quad (2.19)$$

$$\text{ГН} \quad Q_{\alpha} = -\mu \dot{\alpha} + mgz_c \cos \alpha \cos \beta + M_{\alpha} \cos \omega_{\alpha} t \quad Q_{\beta} = -\mu \dot{\beta} + mgz_c \sin \alpha \sin \beta + M_{\beta} \cos \omega_{\beta} t \quad (2.20)$$

• Уравнения движения электростатического гироскопа

ГВ

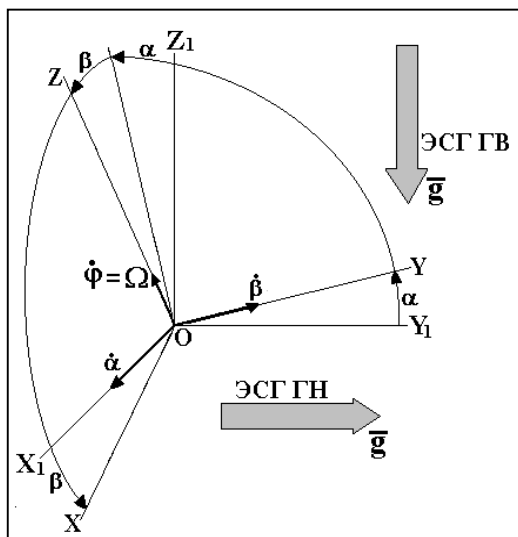
$$\begin{aligned} A(\ddot{\alpha} \cos^2 \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin^2 \beta) + \mu \dot{\alpha} + H \dot{\beta} \cos \beta &= mgz_c \sin \alpha \cos \beta + M_\alpha \cos \omega_\alpha t, \\ B \ddot{\beta} + A \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta + \mu \dot{\beta} - H \dot{\alpha} \cos \beta &= mgz_c \cos \alpha \sin \beta + M_\beta \cos \omega_\beta t; \end{aligned} \quad (2.21)$$

ГН

$$\begin{aligned} A(\ddot{\alpha} \cos^2 \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin^2 \beta) + \mu \dot{\alpha} + H \dot{\beta} \cos \beta &= mgz_c \cos \alpha \cos \beta + M_\alpha \cos \omega_\alpha t, \\ B \ddot{\beta} + A \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta + \mu \dot{\beta} - H \dot{\alpha} \cos \beta &= mgz_c \sin \alpha \sin \beta + M_\beta \cos \omega_\beta t. \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$C(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\phi}) = H = \text{const},$$

2. Линеаризованные уравнения, уравнение движения ЭСГ с учетом $A=A_0+A_T$



ГВ

$$\begin{aligned} A_0 \ddot{\alpha} + \underline{A_T} \ddot{\alpha} + \mu \dot{\alpha} + H \dot{\beta} &= \underline{mgz_c} \alpha + M_\alpha \cos \omega_\alpha t, \\ A_0 \ddot{\beta} + \underline{A_T} \ddot{\beta} + \mu \dot{\beta} - H \dot{\alpha} &= \underline{mgz_c} \beta + M_\beta \cos \omega_\beta t; \end{aligned} \quad (2.23)$$

ГН

$$\begin{aligned} A_0 \ddot{\alpha} + \underline{A_T} \ddot{\alpha} + \mu \dot{\alpha} + H \dot{\beta} &= \underline{mgz_c} + M_\alpha \cos \omega_\alpha t, \\ A_0 \ddot{\beta} + \underline{A_T} \ddot{\beta} + \mu \dot{\beta} - H \dot{\alpha} &= M_\beta \cos \omega_\beta t. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Индекс "0" означает номинальное значение параметра, индекс "T", что это температурная (технологическая) **малая** добавка к номинальному значению.

Важные особенности ЭСГ

- (2.23), (2.24) - уравнения движения **свободного гироскопа**, но с особенностями - "температурные" или "технологические" факторы (подчеркнутые слагаемые);
- действуют моменты от смещения ц. м. ("температурная" или "технологическая" **маятниковость**);
- нутационные члены имеют "температурные" или "технологические" добавки;
- в ГН маятниковость играет **более существенную** роль, чем в ГВ, т.к. момент от смещения ц. м., действующий на ГН, значительно больше, чем момент, действующий на ГВ.

Аналитические оценки

Рассмотрим линеаризованные уравнения (2.23) ГВ при $\mu = 0$, $A_T = 0$, $z_c = 0$ и при действии гармонического возмущающего момента по α :

$$\begin{aligned} A_0 \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} &= M_\alpha \cos \omega_\alpha t, \\ A_0 \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

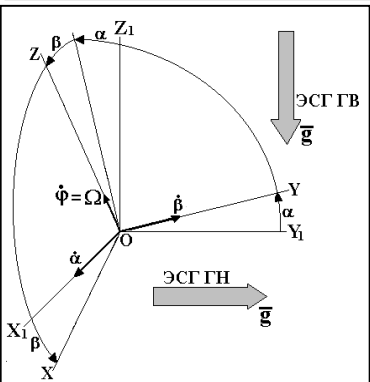
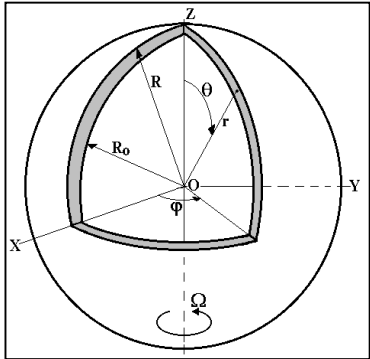
Из уравнений (2.25), при H достаточно большим, получим прецессионные уравнения движения:

$$\begin{aligned} H \dot{\beta} &= M_\alpha \cos \omega_\alpha t, \\ -H \dot{\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Решая (2.26) при нулевых н. у. получим законы прецессионного движения оси гироскопа по α и β :

$$\alpha \approx 0 \quad \beta = \frac{M_\alpha}{H \omega_\alpha} \sin \omega_\alpha t \quad (2.27)$$

• При действии гармонического возмущающего момента M_α ось гироскопа совершает **прецессионные колебания по β** с амплитудой $M_\alpha / H \omega_\alpha$ и частотой ω_α . По α амплитуда колебаний **существенно меньше**. Для исследования малых нутационных колебаний надо решать (2.25).



Исходные данные по параметрам электростатического гироскопа.

Полый бериллиевый ротор:

$m=0,015 \text{ кг}$; $H = 0,025 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $\mu = 0,00005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $A = B = 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$;
радиусы $R=0,026 \text{ м}$; $R_0=0,025 \text{ м}$; зазор между ротором и камерой $h=150 \text{ мкм}$.

Действует гармонический момент внешних сил $M_\alpha=0,03 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $\omega_\alpha=20 \text{ с}^{-1}$.

Сплошной бериллиевый ротор:

$m=0,001 \text{ кг}$; $H=0,0002 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $\mu = 0,00005 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $A = B = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$;
радиус $R = 0,005 \text{ м}$; зазор между ротором и камерой $h=30 \text{ мкм}$.

Действует гармонический момент внешних сил $M_\alpha=0,0003 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $\omega_\alpha=20 \text{ с}^{-1}$.