

Кейвнне и многонговне метод решение ОДУ.

1

Вопрос: Что не могут евные метод типа
Рунге-Кутты?

Пр. ОДУ: $y' = \lambda y$ $y(0) = y_0$ (1)

$\lambda < 0$.

Метод Эйлера $\Rightarrow$

$$y_{n+1} = y_n + h \lambda y_n = (1 + \lambda h) y_n \quad (2)$$

Точное решение задачи (1): $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$ (3)

Т.к. $\lambda < 0 \Rightarrow$



$y \rightarrow 0$ монотонно и
сохраняет знак.

Если анализировать разницу (2), то монотонное
возможно только, когда $0 < (1 + \lambda h) < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\lambda| h < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda < 0 \\ \ominus \\ h > 0 \\ \oplus \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{h < 1/|\lambda|} \quad (4)$$

(4) - условие устойчивости метода Эйлера:

Пр. 1

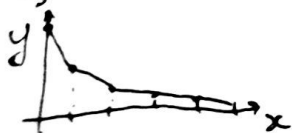
$$y' = -100y$$

$$y_0 = 100; \quad h = 0.005$$

$$y_1 = 100(1 - 100 \cdot 0.005) = 50 \cdot 1/2 = 50$$

$$y_2 = 50(1 - 1/2) = 25$$

$$y_3 = 25 \cdot 1/2 = 12.5$$



Пр 2.

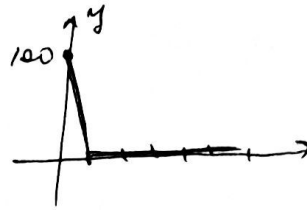
$$y' = -100y$$

$$h = 1/1 \lambda$$

$$y_0 = 100 ; h = 0.01$$

$$y_1 = 100 (1 - 100 \cdot 0.01) = 0$$

$$y_2 = 0 \rightarrow y_3 = 0 \dots 0$$



Пр 3

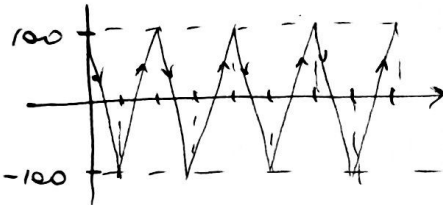
$$y' = -100y$$

$$h > 1/1 \lambda$$

$$y_0 = 100 ; h = 0.02$$

$$y_1 = 100 (1 - 100 \cdot 0.02) = 100 (-1) = -100$$

$$y_2 = -100 \cdot (-1) = 100 \rightarrow y_3 = -100 \rightarrow y_4 = 100 \rightarrow y_5 = -100 \dots$$



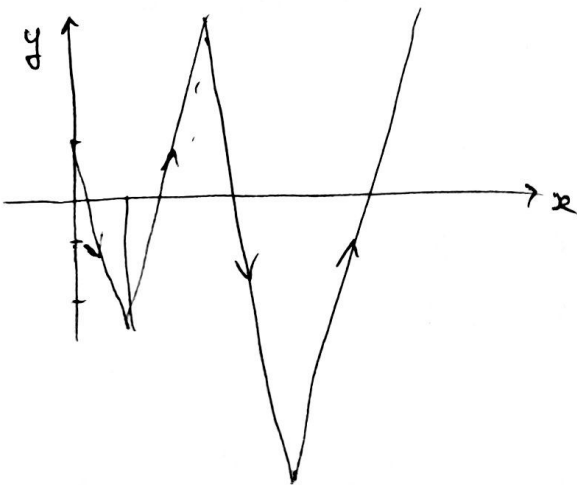
Пр 4

$$y' = -100y$$

$$y_0 = 100 ; h = 0.03$$

$$h > 1/1 \lambda$$

$$y_1 = 100 (1 - 3) = -200 \rightarrow y_2 = +400 \rightarrow y_3 = -800 \rightarrow y_4 = 1600 \rightarrow \dots$$



← "резкое"
искажение
типа решения.

Если рассмотреть метод второго порядка:

$$\begin{cases} y = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_0, y_0); \quad k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) \end{cases} \quad \left\{ \text{когда } \alpha_2 = 1 \right\}$$

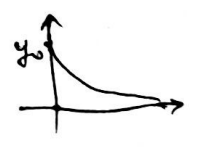
Применим эту схему к простейшему уравнению $y' = \lambda y$

~~$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(\lambda h y_n + h \lambda (y_n + h \lambda y_n))$$~~

$$k_1 = h \lambda y_n \quad k_2 = h \lambda (y_n + h \lambda y_n)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(h \lambda y_n + \lambda h (y_n + \lambda h y_n)) = \\ &= (1 + \lambda h + \lambda^2 h^2 / 2) y_n \end{aligned}$$

Тогда чтобы иметь место характер монотонности ↘



необходимо $0 < (\dots) < 1$;

$$0 < 1 + \lambda h + \lambda^2 h^2 / 2 < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 < \lambda h < 0$$

$$\boxed{|\lambda| h < 2}$$

← условие устойчивости метода 2^{го} порядка.

Для метода 4^{го} порядка (Р.-К.-классический): $h|\lambda| < 2.785$

Но, конечно, нет смысла уточнять условие устойчивости, следовательно мы рассмотрим модифицированное уравнение

$$y' = \lambda y \quad \lambda < 0.$$

Чем больше $|\lambda|$, тем сложнее и "резче" изображение и тем меньше величина шага h .

Если $\lambda > 0$:

$$y = y_0 e^{\lambda x}$$



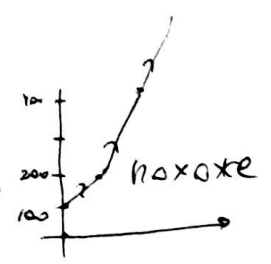
монотонное решение ↗

и. д.: Пр. 5.

$$y_0 = 100; \quad h = 0.01$$

$$y_1 = y_0(1 + h\lambda) = 2y_0 = 200$$

$$y_2 = 2y_1 \Rightarrow 400 \rightarrow y_3 = 800$$



Пр. 6

$$h = 0.02$$

$$y_0 = 100$$

$$y_1 = y_0(1 + h\lambda) = 3y_0 = 300 \rightarrow y_2 = 600 \rightarrow y_3 = 1800 \dots$$



...

Т.е. менее опасная ситуация.

Т.о. "жесткие" ОДУ решать лучше с учетом условия устойчивости. !!!

Иногда для выполнения условия устойчивости придется сделать очень маленький шаг при использовании явных эрланговых методов Рунге-Кутты.

Демонстрация примера системы Лотка-Вольтерра в MathCAD

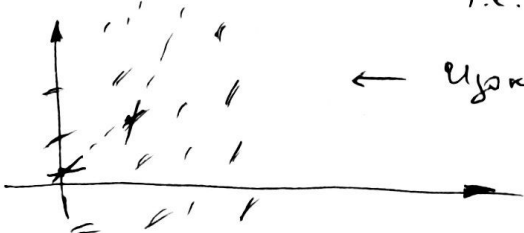
⇒ Нужны другие методы.

Самый простой выход:

Модифицированный (явный) метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (5)$$

т.е. шагем с наклоном "в следующей точке".



← уточнено

Явность формулы (5) определяет сложность использования.

Пр.

$$y' = \lambda y$$

$$\lambda < 0$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h \lambda y_{n+1} \Rightarrow$$

$$y_{n+1}(1 - h\lambda) = y_n \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{(1 - h\lambda)}$$

З 7.

5

$$y' = -100y$$

$$y_0 = 100 \quad h = 0.03$$

$$y_{n+1} = 100 / (1 + 3) = \frac{1}{4} 100 = 25 \rightarrow y_2 = \frac{1}{4} 25 \approx 6 \rightarrow y_3 \approx 1.5 \dots$$



Этот метод 7. в Гр 4. демонстрирует расхождение



Т.е. можно вывести в методе

Общая

рекомендация: По рассмотренным причинам

для жестких ОДУ следует использовать
специальные методы.

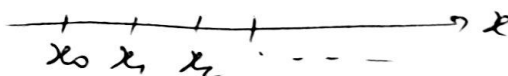
Жесткие ОДУ ~ если |собственные значения| огромны.

а) - быстрое изменение
б) - медленное изменение

Метод невязных трапеций Адамса

$$y' = f(x, y)$$

$$y(0) = y_0$$



$$[x_0, x_1]$$

Принципиально упр-е на этом этапе интегрирование:

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx \quad (6)$$

$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx$ - аналитически в общем случае не берется $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нужно приближать $\Rightarrow$ по методу трапеций

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx \approx \frac{1}{2} h (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)) \Rightarrow (6) \Rightarrow$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} h (f_0 + f_1)$$

(7) $\Rightarrow$ явное
разностное;

(6)

$$(1 + \frac{1}{2} h) y_1 = y_0 (1 + \frac{1}{2} h)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} h (f_0 + f_1)$$

Аналогично справится более точные формулы,
когда $\int_{-\infty}^{\infty}$ ищем по другому методу, например,
по методу Симпсона и проч...

Пр 1.

$$\dot{y} = \sin(ty)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h (\sin(t_i y_i) + \sin(t_{i+1} y_{i+1})) \leftarrow \text{остается}$$

нелинейной
формулой

т.к. "трудно"
разрешить
относительно y_{i+1}

Пр 2.

$$\dot{y} = -1000y$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (-1000y_i - 1000y_{i+1})$$

$$y_{i+1} (1 + 500h) = y_i - 500h y_i$$

$$y_{i+1} = \frac{1 - 500h}{1 + 500h} y_i$$

$\leftarrow$ здесь удалось получить
явное разностное уравнение.