

Реш. лог. реш. задач на
собств. знач. и вектора матриц

8201

1

Основные спектральные св-ва матриц.

$$Ax = \lambda x \Rightarrow x \neq 0 - \text{собств. вектор} \\ \lambda - \text{собств. знач.}$$

$$(A - \lambda E)x = 0 \rightarrow \det(A - \lambda E) = 0 - \text{хар-е}$$

$n \times n$

$$\text{Если найденное } \lambda_j \Rightarrow (A - \lambda_j E)x_j = 0 \Rightarrow x_j$$

Если кол-во лог. независ. собств. векторов матрицы $A_{n \times n}$ совпадает с размерностью R^n , то их можно принять за базис, в котором матрица A примет диагональный вид:

$$A = U^{-1} \cdot A \cdot U.$$

Тогда на главной диагонали A стоят собств. значения, а столбцы матрицы преобразования U являются собственными векторами матрицы A .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Матрицы } A \text{ и } \Lambda \text{ наз-ся подобными} \\ \text{т.к. совершается преобраз-е подобия:} \\ \Lambda = U^{-1} \cdot A \cdot U \end{array} \right\}$$

4). Если все эл-ты квадратной матрицы > 0 , то наибольшее по модулю собств. значение ее также положительно, является простым (т.е. не кратным) корнем хар-го ур-я и ему соответствует собств. вектор с положит. компонентами.

Это теорема Перрона.

- 2). Если для собств. значения λ найден собств. вектор x , то вектор cx ($c = \text{const}$) также явл-я собств. вект. $\leftarrow$ Очевидно
- 3). Парно разнотипным собств. значениям λ линейно независ. собств. векторы.
- 4). k -кратному корню хар-го др-я соответствует не более k ($\leq k$) линейно независ. собств. векторов.
- 5). Собственные значения подобных матриц Λ и A совпадают. ($\Lambda = U^{-1} A U$).
- 6). Симметрическая матрица A ($A = A^T$) имеет полный спектр λ_j ($j = \overline{1, n}$) вещественных собств. значений.
- 7). Положительно определенная симметрическая матрица ($A = A^T$; $(Ax, x) > 0$) имеет полный спектр веществ. положительных собств. значений.

~~8). k -кратному корню хар-го др-я симметрической матрицы ровно k линейно независимых собств. векторов.~~

9). Симметрическая матрица имеет ровно n ортогональных собств. векторов (в соответствии со свойством 6)), причем которые да новый базис (т.е. построив матрицу преобразования U , взяв за ее столбцы координатные столбцы собственных векторов), можно преобразовать симметрическую матрицу A к диагональному виду Λ :

$$\Lambda = U^{-1} \cdot A \cdot U.$$

10). Дана симметрическая матрица A
 матрица преобразования U к диаг.
 виду есть - она ортогональной (т.е. $U^{-1} = U^T$),
 и, следовательно, преобразование к диаг.
 виду есть: $\Lambda = U^T \cdot A \cdot U$.

Собств. числа матриц A и Λ одинаковы,
 но собств. вектора РАЗЛИЧНЫ! :

1. ▽ $M = U^T \cdot B \cdot U$

$\det M = \frac{1}{\det U} \cdot \det B \cdot \det U = \det B$ ← на основе
 св-ва определителя
 трансп. матрицы и
 св-ва определителя обратной матрицы

$\Rightarrow$ характерист. многочлены матриц Λ и A
 одинаковы $\Rightarrow$ одинаковы их корни с собств.
 значениями.

$$\Lambda = U^{-1} A U$$

$$\Lambda - \lambda E = U^{-1} A U - \lambda E = U^{-1} A U - \lambda U^{-1} E U =$$

$$= (U^{-1} A - U^{-1} \lambda E) U = U^{-1} (A - \lambda E) U \Rightarrow$$

$$\Lambda - \lambda E = M ; \quad B = A - \lambda E$$

$$\Rightarrow \det M = \det B \Rightarrow \boxed{\det(\Lambda - \lambda E) = \det(A - \lambda E)}$$

2. ▽ Собств. вектора различны:

$$\begin{aligned} \Lambda y = \lambda y &\leadsto y - \text{собств. вект. } \Lambda \\ Ax = \lambda x &\leadsto x - \text{""} - A \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\Lambda y = \underbrace{U^{-1} A U}_\Lambda y \Rightarrow \underbrace{A \cdot (Uy)}_{\text{умножили слева на } U} = U \Lambda y = U \lambda y = \lambda (Uy) \Rightarrow \boxed{x = Uy}$$

$x \neq y$

Покажем, что столбцы матрицы U - есть
собств. векторы матрицы A

4
8gon

▼ $Ax = \lambda x$, x - собств. вект. A

1. Выше показано, что $x = Uy$ (1)

2. ~~Также~~ Ясно, что если выполнено преобр.-е $\Lambda = U^{-1}AU$,
то Λ - диаг. с λ_i -ми = собств. значения.

Тогда, Например для первого собств. вектора $y^{(1)}$:

$$\Lambda y^{(1)} = \lambda_1 y^{(1)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(1)} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1^{(1)} = \lambda_1 y_1^{(1)} \Rightarrow y_1^{(1)} = 1 \quad (\text{выбираем } y_1^{(1)} = 1 \text{ любое число и делаем так же } 1) \\ \lambda_2 y_2^{(1)} = \lambda_1 y_2^{(1)} \quad \text{т.к. } (\lambda_2 \neq \lambda_1) \Rightarrow y_2^{(1)} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n^{(1)} = \lambda_1 y_n^{(1)} \Rightarrow \lambda_n \neq \lambda_1 \Rightarrow y_n^{(1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Аналогично $y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, y^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. На основании (1) для $y^{(1)}$ имеем:

$$x^{(1)} = Uy^{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & & & \\ \vdots & & u_{ij} & \\ u_{n1} & \dots & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$
 U

Аналогично $\forall j$: $\begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ \vdots \\ x_n^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ вектор $x^{(j)}$ -
это j -й столб.
 U ▲

На основе описанных выше свойств

собств. чисел и векторов матриц Λ и A

и/с разработан след. метод определения

собств. чисел и векторов симметрич. матриц A .

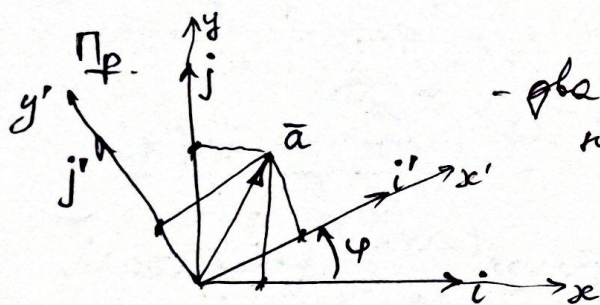
Метод вращений Якоби

ПОЛНАЯ ПРОБЛЕМА

Т.к. $\Lambda = U^T A U$; $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ на диаг. стоят собств. числа.

Матрица U в м. Я. интерпретируется как матрица поворота некоторого (исходного) базиса в другой базис. Осуществляется серия поворотов до тех пор, пока не придет в "собственный" базис матрицы A , где она запишется в диаг. виде.



- два базиса: (i, j) и (i', j') повернуты на $\angle \varphi$:

$$\bar{a} = a_x i + a_y j$$

$$\bar{a} = a_{x'} i' + a_{y'} j'$$

Это $\Rightarrow$
из геометрии
по рис.

$$\begin{bmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \end{bmatrix}$$

$$\therefore U = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = U^T$$

Шаг, ч. 2.

6
8901

✓ требуется с точность ε вычислить K собств. значения и соотв. им собств. вектора.

Алгоритм:

✓ $A^{(k)}$ ~~является~~ является приближением матрицы A на k -й итерации, при этом $A^{(0)} = A$ ($k \geq 0$).

1) Выбирается максимальный по модулю недиагональный эл-т $a_{ij}^{(k)}$ матрицы $A^{(k)}$:

$$\max_{i < j} |a_{ij}^{(k)}|$$

2) Составить заранее построение такой $U^{(k)}$, чтобы после преобраз-я: $A^{(k+1)} = U^{(k)T} A^{(k)} U^{(k)}$ произошло обнуление эл-та $a_{ij}^{(k+1)}$ matr. $A^{(k+1)}$.

Матрицу $U^{(k)}$ ищут как матрицу "вращения" вида:

$$U^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \cos \varphi^{(k)} & & -\sin \varphi^{(k)} & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

i j

Угол "поворота" $\varphi^{(k)}$ ищется из условия, что

$$a_{ij}^{(k+1)} = 0 : \quad \varphi^{(k)} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}$$

если ~~если~~ $a_{ii}^{(k)} = a_{jj}^{(k)} \Rightarrow \varphi^{(k)} = \pi/4$.

Вычисление собственных значений
и векторов матриц.

§. 2

$$Ax = \lambda x \quad (0) \quad A - \text{квадратная } n \times n$$

λ - скаляр, x - вектор

Нужно решить ур-е:

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda E| = 0 \quad (1)$$

Ур-е (1) запишем в виде степенного ур-я:

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n) = 0 \quad (2)$$

Если каким-либо образом мы опосредованно,
не раскрывая определителя (1), найдем
коэффициенты p_i в ур-ии (2), то далее,
решая (2) стандартными итерационными
методами, мы найдем все λ .

Поскольку, как все λ известны, найдем
все собств. векторы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

- СЛАУ



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{таких} \\ n \text{ штук} \end{matrix}$$

Метод Крылова

§.3

Суть метода: преобразование
определителя $D(\lambda)$ к виду:

$$D_1(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} - \lambda^2 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} - \lambda^n & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Это преобразование проверить так:

Берут первое $n-1$ уравнение системы $Ax = \lambda x$
(0) и умножают его на λ , ранее все
появившиеся в левой части выражение λx_i
замениют на правые или в силу (0)

выражение: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$

Получим:

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = \lambda^2 x_1 \quad (4)$$

Если умножим (4) на λ и поступим
аналогично, получим:

$$b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + \dots + b_{3n}x_n = \lambda^3 x_1$$

$$\text{где } b_{3i} = \sum_{k=1}^n b_{2k} a_{ki} \quad i=1..n$$

и т.д.

$$b_{lj} = \sum_{k=1}^n b_{(l-1)k} a_{kj} \quad \leftarrow \text{где } l=2..n$$

$$b_{1k} = a_{1k}$$

Т.о. получены все коэффициенты
в (3).

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ b_{21}x_1 + \dots + b_{2n}x_n = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ b_{n1}x_1 + \dots + b_{nn}x_n = \lambda^n x_1 \end{cases} \quad (5) \quad \textcircled{8.4}$$

Определитель этой системы как раз и равен $\mathcal{D}_1(\lambda)$.

Таким образом можно показать, что

$$\frac{\mathcal{D}_1(\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} = C_1 = \text{const}$$

Если $C_1 \neq 0 \Rightarrow$ гр-я $\mathcal{D}(\lambda) = 0$ и $\mathcal{D}_1(\lambda) = 0$ эквивалентны.

Вообще, рассмотренная операция возмещение b_{ij} можно интерпретировать как последовательное возмещение из

вектора $b_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$

векторов $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})^T$

~~или~~ по формулам:

$$b_i = A^T b_{i-1} \quad (6)$$

A^T - трансп. исходная матрица.

$$(6) \Rightarrow b_i = (A^T)^i b_0 \quad \forall i$$

Обобщим эту методику на произвольный вектор b_0 :

§.5

$$b_0 = (b_{01}, b_{02}, \dots, b_{0n})^T.$$

$$b_i = (A^T)^i b_0.$$

Этой преобразованной соответствует система:

$$\begin{cases} u = b_{01}x_1 + b_{02}x_2 + \dots + b_{0n}x_n \\ \lambda u = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \\ \dots \\ \lambda^n u = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n \end{cases}$$

переходим на 1-й шаг
большая размерность
(7) $0, \dots, n$

Есть определитель равен:

$$D_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & b_{01} & b_{02} & \dots & b_{0n} \\ \lambda & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^n & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \text{ причем}$$

$$\frac{D_2(\lambda)}{D(\lambda)} = \begin{vmatrix} b_{01} & b_{02} & \dots & b_{0n} \\ b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} = C_2 = \text{const}$$

Можно, причем, выбрать начальный b_0 так, что $C_2 \neq 0$. $\Rightarrow$

т.е. $D(\lambda) = 0$ и $D_2(\lambda) = 0$ эквивалентны.

Чтобы записать определитель $D_1(\lambda)$ или $D_2(\lambda)$ в виде многочленов НЕ высоких степеней, можно применить теорему Гамильтона-Кэли

Теорема Гамильтона - Кэли:

8.6

Выполняется матричное соотношение

$$(A^T)^n + p_1 (A^T)^{n-1} + \dots + p_{n-1} A^T + p_n E = 0, \quad (8)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ есть координаты

многочлена
$$D(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n)$$

Умножим (8) на v_0 , получим:

$$\underline{v_n} + p_1 \underline{v_{n-1}} + p_2 \underline{v_{n-2}} + \dots + p_{n-1} \underline{v_1} + p_n \underline{v_0} = 0 \quad (9)$$

т.к.
$$v_i = (A^T)^i v_0$$

Векторное равенство (9) дает СЛАУ n уравнений

для определения всех p_i :
$$\begin{bmatrix} v_{n-1} & v_{n-2} & \dots & v_1 & v_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} = -v_n$$

Найдем $\forall p_i \Rightarrow$ сумми записать определитель $D(\lambda)$ в виде многочлена.

Замечание.

Можно использовать теорему Г-К сразу для матрицы A . Тогда приходим к системе:

$$c_n + p_1 c_{n-1} + p_2 c_{n-2} + \dots + p_{n-1} c_1 + p_n c_0 = 0, \quad (10)$$

где $c_i = (A)^i c_0$, а

c_0 - произвольный начальный вектор.

$$U_3 (10) \Rightarrow \text{все } p_i.$$

Метод Данилевского

§.7

Суть: получить многочлен $\Delta(\lambda)$ путем преобразования ур-я

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda E| = 0 \text{ к виду}$$

$$\begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

При этом определитель (1) раскроем по строке (по 1-й строке):

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n)$$

т.е. $A \rightarrow A^* = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ E \end{bmatrix}$ - нормальная форма Фробениуса.
 Как это осуществить?

Модифицированный метод Данилевского;

$$(1) \Rightarrow (1)' \text{ вида: } \Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & p_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_n \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta'(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - \sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1} \lambda^i \right] \leftarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{по последней} \\ \text{столбцу} \end{matrix}$$

Это происходит путем n преобразований подобия исходной матрицы A : $\downarrow$

На примере 4×4 :

8.8

$$C_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 1 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 1 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & a_{44} \end{array} \right) = \text{6 блоков} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & t \\ \hline E & \tau \end{array} \right]$$

тогда:

$$C_1^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} -\frac{\tau}{t} & E \\ \hline \frac{1}{t} & 0 \end{array} \right)$$

Выберем такую матрицу C .

Выполним преобразование подобия:

$$A_1 = C_1^{-1} A C_1$$

У подобных матриц одинаковы все показатели: $\det$, rank , след, спектр $(\lambda) \dots$

A_1 и A - подобны.

Теперь строим матрицу C_2 также как и C_1 , но на основе матрицы A_1

$$C_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a_{14}^{(1)} \\ \hline E & & & a_{44}^{(1)} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & t^{(1)} \\ \hline E & \tau^{(1)} \end{array} \right]$$

$$C_2^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} -\frac{\tau^{(1)}}{t^{(1)}} & E \\ \hline \frac{1}{t^{(1)}} & 0 \end{array} \right)$$

Далее выполняем подобие n -й строки 8.9
 подобие матрицы A , с помощью C_2, C_2^{-1} :

$$A_2 = C_2^{-1} A_1 C_2 \quad \text{и т.д.}$$

$$\dots$$

$$C_3^{-1} C_2^{-1} C_1^{-1} A C_1 C_2 C_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a_{14}^{(3)} \\ 1 & 0 & 0 & a_{24}^{(3)} \\ 0 & 1 & 0 & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{44}^{(3)} \end{array} \right]$$

В общем случае матрицы $n \times n$
 необходимо выполнить $(n-1)$ подобий-е
 подобие с матрицами C_i, C_i^{-1}
 $i = 1 \dots (n-1)$

Для приведения A к матрице:

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & a_{nn}^{(n-1)} \end{array} \right]$$

У матрицы A^* такие же собств. $\lambda \Rightarrow$

$$|A^* - E\lambda| = 0 \quad - \text{запишем}$$

$$\det \left[\begin{array}{cccc|c} -\lambda & 0 & \dots & \dots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 1 & -\lambda & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & a_{nn}^{(n-1)} - \lambda & \end{array} \right] = \mathcal{D}'(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - \sum_{i=2}^{n-1} a_{in}^{(n-1)} \lambda^i \right]$$

Замечание: В качестве матрицы C_1 можно
 взять произвольную матрицу $\begin{bmatrix} 0 & t \\ E & t \end{bmatrix}$, где $t \neq 0$. Это приведет
 к добавлению
 одного шага.

О границах расположения собственных значений.

9.1

1). Если получен характеристический
многочлен $\varphi(\lambda) = |A - E\lambda| = 0 = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^{n-i}$, то
корни λ_i - соб. числа характеризуются
ограничениями:

$$\varphi(\lambda) = a_0 \lambda^n + \dots + a_n = 0 \quad a_0 = 1$$

I). $a = \sup_{i=1..n} \{|a_i|\} \quad a' = \sup_{j=0..(n-1)} \{|a_j|\}$

$$\text{Тогда: } \frac{|a_n|}{a' + |a_n|} \leq |\lambda| \leq 1 + \frac{a}{|a_0|}$$

II). $b \leftarrow \sup(\text{из всех отрицат. коэффици. } a_j)$

Первый в ряду $a_0, a_1, a_2, \dots$ отрицат.
коэффициент есть a_m

Тогда: Все положительные
корни $\lambda < 1 + \sqrt[m]{\frac{b}{a_0}}$

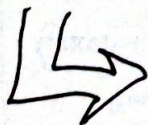
Если
отрицат.
коэффициент
нет, то
нет и
положит-ых
корней
?

III). Способ Ньютона.

Утверждение: Если при $x=a > 0$
имеет место неравенство

$$\varphi(a) > 0; \quad \varphi'(a) > 0; \quad \dots; \quad \varphi^{(n)}(a) > 0$$

то ур-е $\varphi(x) = 0$ не имеет корней,
больших a .



Замечание:

В ряде случаев актуален вопрос:

есть ли $\lambda > 1$? $\Rightarrow$ Представим $a \leftarrow 1$ и
проверим утверждение Ньютона.

$\Phi(\lambda) =$ можно записать через корни:

(9.2)

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \neq 0$$

где λ_i - корни ур-я $\Phi(\lambda) = 0$ (+)

У уравнения

$$(\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2) \cdots (\lambda + \lambda_n) = 0 \quad (-)$$

корни противоположны по знаку
корням ур-я (+).

$$\Phi(\lambda) = 0 \text{ - ур-е}$$

У ур-я $\Phi(-\lambda)$ корни противоположны
по знаку

$$\Phi(\lambda) = 0 \quad (+)$$

$$\Phi(-\lambda) = 0 \quad (-)$$

$\Rightarrow$ чтобы определиться с величинами
обрицат. корней ур-я $\Phi(+)$ нужно
определись с величинами
положительных корней ур-я $(-)$.

$$\Phi(-\lambda) = a_0(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Запишем новые коэффициенты как b_i :

$$\begin{cases} b_0 = a_0(-1)^n \\ b_1 = a_1(-1)^{n-1} \\ \vdots \\ b_n = a_n \end{cases}$$

Тогда анализируя корни ур-я

$$b_0 \lambda^n + \dots + b_n = 0$$

можно судить об обрицат. корнях ур-я (+),
по суждениям II) и III).

- 2). Если не прибегать к характеристическому уравнению, то о величинах λ_i судят прямо по матрице A .

Итак, рассмотрим ур-е $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$

$\bar{x}$ — вектор; λ — ~~Real Complex~~ ~~число~~.

~~В этом случае~~ ^{Будем считать, что} имеется n действит. значений λ .

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

$\uparrow$ наименьш. $\uparrow$ наибольш.

Числам $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ соответствуют n собств.

векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, которые можно считать действительными и ортонормированными ($\bar{x}_i \cdot \bar{x}_j = 0$).

Возьмем произвольный вектор $\bar{x}$ и разложим его по базису $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$:

$$\bar{x} = c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \dots + c_n \bar{x}_n$$

В этом случае $\bar{x} \cdot \bar{x} = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots + c_n^2$.

$$A\bar{x} = A(c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_n \bar{x}_n) = c_1 A\bar{x}_1 + \dots + c_n A\bar{x}_n = c_1 \lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + c_n \lambda_n \bar{x}_n$$

$$(A\bar{x}) \cdot \bar{x} = \lambda_1^2 c_1^2 + \dots + \lambda_n^2 c_n^2$$

$$\lambda_1 - \text{наименьшее из } \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 c_1^2 + \dots + \lambda_n^2 c_n^2 \geq \lambda_1^2 c_1^2 + \lambda_1^2 c_2^2 + \dots + \lambda_1^2 c_n^2 = \lambda_1^2 (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)$$

$$\Rightarrow A\bar{x} \cdot \bar{x} \geq \lambda_1 (c_1^2 + \dots + c_n^2)$$

λ_n - наибольшее $\Rightarrow$

9.4

$$\lambda_1 c^2 + \dots + \lambda_n c_n^2 \leq \lambda_n (c_1^2 + \dots + c_n^2) \Rightarrow A\bar{x} \cdot \bar{x} \leq \lambda_n (c_1^2 + \dots + c_n^2)$$

Получили оценку (убоюющую);

$$\lambda_1 (c_1^2 + \dots + c_n^2) \leq A\bar{x} \cdot \bar{x} \leq \lambda_n (c_1^2 + \dots + c_n^2)$$

$$\lambda_1 \bar{x} \cdot \bar{x} \leq A\bar{x} \cdot \bar{x} \leq \lambda_n \bar{x} \cdot \bar{x}$$

$$\boxed{\lambda_1 \leq \frac{A\bar{x} \cdot \bar{x}}{\bar{x} \cdot \bar{x}} \leq \lambda_n} \quad - \quad \text{соотношение, определяющее принцип Релея. (ПР)}$$

ПР дает некоторую информацию о экстр. зн.

Т.к. вектор $\bar{x}$ - произвольный, то при переборе таких $\bar{x}$ верхняя граница неравенства ПР $\rightarrow$ к наибольшему λ_n , а нижняя $\rightarrow$ к наименьшему λ_1 .

На векторах $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_n$ имеют место равенства в ПР.

Замечание

$\bar{x}$ - произвольный.

$$\text{Берем } \bar{x} = (1, 0, \dots, 0)^T \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{x} = 1$$

$$A\bar{x} = [a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}]^T \sim \text{первой столбцу } A$$

$$A\bar{x} \cdot \bar{x} = a_{11} \Rightarrow \lambda_1 \leq a_{11} \leq \lambda_n$$

$$\text{Берем } \bar{x} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)^T \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{x} = 1$$

$$A\bar{x} = [a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}]^T - i\text{-тый столб. } A$$

$$A\bar{x} \cdot \bar{x} = a_{ii} \Rightarrow \lambda_1 \leq a_{ii} \leq \lambda_n$$

$\Rightarrow$ Если какой-нибудь $a_{ii} > 1 \Rightarrow \lambda_n > 1$?
 $\uparrow$ диагональный эл-т.

Отступление: О нормах матриц

9.5

Нормы для векторов:

1). $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

2). $\|x\| = \max_i |x_i|$

3). $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

Если n -т и его норма вычисляется как 2). $\Rightarrow$

$$\|Ax\| = \max_i \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |x_k|$$

↑
вектор

Если $\|x\| = 1 \Rightarrow \|Ax\| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$

Пусть $\max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$ достигается при $i=j$.

Возьмем в качестве x элемент e

компонентами $x_k = \frac{|a_{jk}|}{a_{jk}}$ при $a_{jk} \neq 0$, ~~иначе~~

если $a_{jk} = 0$, то берем $x_k = 1$.

Очевидно, что e — это и такое $\|x\| = 1$ и

при этом $\left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right| = \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$.

Следовательно, $\|Ax\| = \sum_{k=1}^n |a_{jk}| = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$ (*)

~~Для нормы вектора справедливо~~

~~$\|c \cdot z\| = |c| \|z\|$, где z — элемент пространства~~

~~$c = \text{const}$ — скаляр~~

~~$\Rightarrow$ в матричном пространстве сходно~~

A - линейный (матрица)

9.6

Если существует такая постоянная C , что для $\forall x$ выполнено нер-во:

$$\|Ax\| \leq C \|x\|, \text{ то оператор } A$$

называют ограниченным, а наименьшее из таких чисел C ~~существует~~ называют нормой оператора.

Мы получили соотношение (*):

$$\left. \begin{aligned} \|Ax\| &= \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \\ \|x\| &= 1 \end{aligned} \right\} \|Ax\| = \max \sum |a_{ik}| \cdot \|x\|$$

Т.к. $\|x\| = 1$

Следовательно в лине. пространстве с нормой 2). норма оператора (матрицы) вычисляется как:

$$C = \|A\| = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

Аналогично рассматривая нормы 1) и 3), получим следующую таблицу соответствия норм n -ров и операторов в лине. пространствах:

$\ x\ $	$\ A\ $
1). $\ x\ = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$	1). $\ A\ = \sqrt{\lambda_n}$, где λ_n - наибольшее собственное число матрицы $A^T A$
2). $\ x\ = \max_i x_i $	2). $\ A\ = \max_i \sum_{k=1}^n a_{ik} $
3). $\ x\ = x_1 + x_2 + \dots + x_n $	3). $\ A\ = \max_k \sum_{i=1}^n a_{ik} $

Пусть имеем эр-е $Ax = \lambda x$

9.7

$$\Rightarrow \|Ax\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\text{но } \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \} \Rightarrow \|A\| \geq |\lambda|$$

Т.о. Любая норма матрицы больше или равна модулю произвольного собственного числа:

$$\max_i |\lambda_i| \leq \|A\|. \quad (**)$$

конец отступления.

Снова о расположении λ_i

Воспользуемся (**) для оценки сверху модулей $|\lambda_i|$:

$$\max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \geq |\lambda_j| \quad j=1, \dots, n.$$

↑
 $\|A\|_2$

- уже
оценки
(***)

$$\max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \geq |\lambda_j|$$

↑
 $\|A\|_3$

Введем пары с матрицей A сим. матрицы:

$$B = \frac{1}{2}(A + \overline{A}^T), \quad C = \frac{1}{2i}(A - \overline{A}^T)$$

" - к-мпл. сопр-ж. B, C - эрмитовы матрицы

Из (***) можно получить оценку для комплексных $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$

$$\# |\alpha_j| \leq \max_r \sum_{s=1}^n |b_{rs}|$$

9.8

$$|\beta_j| \leq \max_r \sum_{s=1}^n |c_{rs}|$$

Можно также показать, что каждое собственное значение λ матрицы A лежит по крайней мере в одном из кругов:

$$|z - a_{rr}| \leq P_r$$

и по крайней мере в одном из кругов:

$$|z - a_{ss}| \leq Q_s.$$

$$\text{где } P_r = \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq r)}}^n |a_{rs}| ; \quad Q_s = \sum_{\substack{r=1 \\ (r \neq s)}}^n |a_{rs}|.$$

- Итерационный метод нахождения $\max |\lambda_j| \in \mathbb{R}$
 - метод вращений для симметрических матриц.
- след. лекция.

Итерационный метод отыскания
наибольшего по модулю действитель-
ного собственного значения матрицы
простой структуры. (10.1)

Простая структура — это значит, что матрица порядка n имеет n линейно независимых собств. вектора.

Матрица A имеет собств. числа:

$\lambda_i: |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ и соответствующие собств. вектора: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n$.

Возьмем произвольный вектор $\bar{v}$. Его можно разложить по базису $\{\bar{x}_i\}$:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n.$$

Вычислим $A\bar{v}$:

$$A\bar{v} = \alpha_1 \lambda_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n \bar{x}_n$$

Вычислим $A^2 \bar{v}$:

$$A^2 \bar{v} = \alpha_1 \lambda_1^2 \bar{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 \bar{x}_n$$

...

$$A^k \bar{v} = \alpha_1 \lambda_1^k \bar{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \bar{x}_n \quad (*)$$

в (*) вынесем за скобки λ_1^k :

$$A^k \bar{v} = \lambda_1^k \left[\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \bar{x}_n \right]$$

Если $\alpha_1 \neq 0$ и $|\lambda_1| > |\lambda_i| \quad i=2..n \Rightarrow$

$$A^k \bar{v} = \lambda_1^k \alpha_1 \bar{x}_1 + o\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right] \quad (**)$$

Таким образом, при достаточно больших k вектор $A^k \vec{v}$ близок к собственному вектору матрицы A соответствующему наибольшему собственному значению.

Может справедливо сказать, что $\alpha_i = 0$.

Однако это не имеет смысла, т.к. при ошибках округления на каком-то этапе k неизбежно появятся ненулевые (пусть малые) компоненты и это "выправит" метод.

Выберем какую-либо i -ю компоненту векторов $A^k \vec{v}$ и $A^{k+1} \vec{v}$. Найдем их отношение:

$$\frac{(A^{k+1} \vec{v})_i}{(A^k \vec{v})_i} = \lambda_1 \frac{\alpha_1 (\bar{x})_i + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1} (\bar{x})_i + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k+1} (\bar{x})_i}{\alpha_1 (\bar{x})_i + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k (\bar{x})_i + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k (\bar{x})_i} =$$

$$= \lambda_1 + O\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1}\right].$$

Таким образом, при достаточно больших k найдено наибольшее по модулю собственное значение λ_1 :

$$\lambda_1 \approx \frac{(A^{k+1} \vec{v})_i}{(A^k \vec{v})_i} \quad (***)$$

Показателем того, что мы достаточно хорошо приближились к λ_1 , является постоянство отношения (***) с приб. точностью.

Метод брауэний отыскание
собст. значений и собст. векторов
симметрических матриц.

10.3

Известно, что для симметрической матрицы существует ортогональная матрица U такая, что

$$U^T A U = \Lambda, \text{ где}$$

Λ - диагональная матрица.

$$U - \text{ортогональная} \Rightarrow U^T = U^{-1} \Rightarrow$$

A подобна $\Lambda \Rightarrow \Lambda$ имеет такие же собст. значения, что и A .

Одновременно мы найдем ~~то~~ все собст. векторы:

$$\lambda_i \sim \bar{e}_i = (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)^T$$

$$\underbrace{U^T A U}_{\text{диаг.}} \bar{e}_i = \lambda_i \bar{e}_i \Rightarrow$$

$$\underbrace{U U^T}_E A U \bar{e}_i = U \lambda_i \bar{e}_i$$

$$A \underbrace{U \bar{e}_i} = U \lambda_i \bar{e}_i = \lambda_i \underbrace{U \bar{e}_i}$$

$$\Rightarrow x_i = U \bar{e}_i - \text{собст. вектор}$$

$$\text{т.к. } Ax_i = \lambda_i x_i.$$

$\forall i,$

Как это конкретно выполнить?

10.4

В методе браункиной матрица U строится как предел последовательности матриц простых поворотов. Матрицы поворотов выбираются так, что на каждом шаге уменьшается максимальный по абс. значению недиагональный элемент.

Имеем следующий алгоритм работы:

1) шаг: Находим $\max$ по абс. значению $a_{i_0 j_0}$ $i_0 < j_0$.

Сформируем матрицу:

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ & & & & \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

i_0 j_0

Угол φ_0 выбирается так, что U матрица

$$A^{(1)} = U_0^T A U_0 = [a_{ij}^{(1)}]$$

т.е. $a_{i_0 j_0}^{(1)}$ обращен в ноль $\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2a_{i_0 j_0}}{a_{i_0 i_0} - a_{j_0 j_0}} \Rightarrow \varphi_0. \quad \left(|\varphi_0| \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

2). Даны элементы наиб. по модулю
 ненулев. эл-та в матрице $A^{(1)}$ и
 закончим его преобразование
 поворота на φ_i : (10.5)
(i, j)

$$\operatorname{tg} 2\varphi_i = \frac{2a_{i,j}^{(1)}}{a_{i,i}^{(1)} - a_{j,j}^{(1)}} \rightarrow U', (U')^T$$

и т.д.

k).
$$A^{(k)} = U_{k-1}^T U_{k-2}^T \dots U_0^T A U_0 U_1 \dots U_{k-1}$$

$$A^{(k)} \rightarrow \Lambda \text{ (прейти к диагональной).}$$