Численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

5.1

Отступление: Определители?

Определитель треугольной матрицы равен ~~ее следу~~ произведению ее диагональных элементов

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

$\Rightarrow$ Применим метод триангуляции Гаусса при вычислении $\det(B)$ произвольной матрицы — ПРИЧЕМ нет разницы в использовании ПРЯМОГО либо ОБРАТНОГО хода.

Решение ур-й $\longrightarrow$ отыскание всех корней, либо доказательство, что их нет вовсе – !

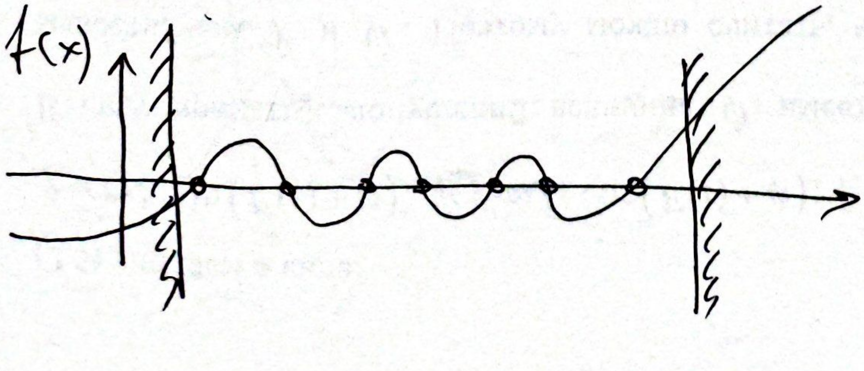
$\Downarrow$

Задача $\nearrow$ отделение корней

Задача $\searrow$ уточнение каждого корня

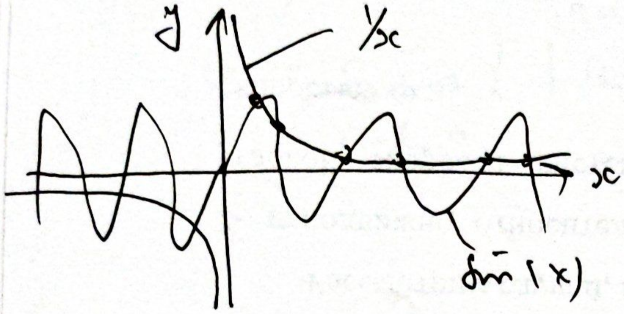
Отделение корней

$f(x) = 0 \Rightarrow$ просмотреть где корни на отрезке $(-\infty, +\infty)$.



Иногда полезно видоизменить ур-е для предварительного анализа к более наглядному виду: $\varphi(x) = \psi(x)$ (5.2)

Пр. $x \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{x} \Rightarrow$



$\Rightarrow$ Корни симметричны относительно нуля.

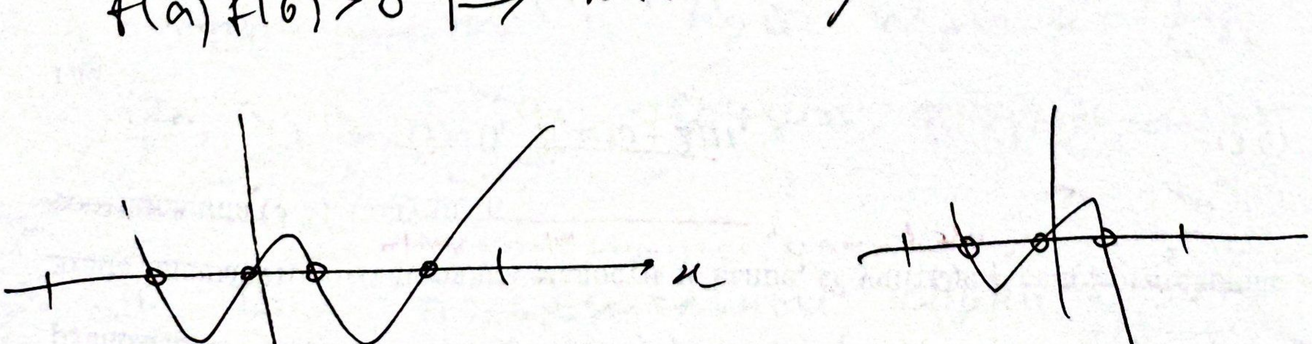
Признаки корня.

1). Если на концах некоторого отрезка непрерывная ф-ция имеет значения разных знаков, то на этом отрезке ур-е $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень.

2) Если при этом $f(x)$ имеет первую НЕ МЕНЯЮЩУЮ знака $\Rightarrow$ корень ЕДИНСТВЕННЫЙ

3). $[a, b]$, $f(a) f(b) < 0$ $\Big| \Rightarrow$ то нечетное число корней

$f(a) f(b) > 0 \Rightarrow$ либо нет / либо четное



Границы расположения корней: 5.3

Полиномиальное ур-е

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (1)$$

$\Downarrow$

$$a = \sup_{\underline{i=1\ldots n}} \{|a_i|\} \qquad a' = \sup_{\underline{j=0\ldots(n-1)}} \{|a_j|\}$$

!

$\Rightarrow$ <u>Теорема 1</u>: все корни расположены в кольце:

$$\frac{|a_n|}{a' + |a_n|} \le |x| \le 1 + \frac{a}{|a_0|}$$

∇ Самостоятельно Δ.

<u>Теорема 2</u>:

$a \leftarrow$ <u>sup</u> из всех |отрицательных| ~~коэф.~~ (по абс. величине) коэффициентов и пусть первый в ряду $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ отрицат. коэффициент есть a_m $\Rightarrow$

Все положительные корни ур-я (1) меньше

$$1 + \sqrt[m]{\frac{a}{a_0}}.$$

∇ самост. Δ.

5.4

После решения задачи отделения корней локализуют один из корней, выбирая некоторый малый интервал, которому он принадлежит $x_* \in [a,b]$ и задают некоторое приближенное значение корня ~~x~~ $\bar{x}$.

Далее уточняют его итерационными методами.

1). Метод Ньютона

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

2) Метод секущих: а) $f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+\varepsilon) - f(x_i)}{\varepsilon} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\,\varepsilon}{f(x_i+\varepsilon) - f(x_i)}$$

б). $f'(x_i) = \frac{f(x_i+\varepsilon) - f(x_i-\varepsilon)}{2\varepsilon} \Rightarrow \ldots$

3). Метод половинного деления (бисекции).

Общие принципы построения итерационных методов решения ур-ий.

Приведено два итерационных метода: м. Ньютона и м. секущих для решения ур-я: $f(x) = 0$.

Итерационные формулы позволяют уточнять текущее приближение и, поэтому, имеют вид: $x_{n+1} \leftarrow \varphi(x_n)$ (1)

Самый простой способ получения вида (1) — это преобразование исходного ур-я.

Т.к. при больших n: $x_{n+1} \simeq x_n \simeq x$, то

1). ур-е $f(x) = 0 \longrightarrow \underline{f(x) + x = x} \longrightarrow$

$\longrightarrow f(x_n) + x_n \simeq x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} = x_n + f(x_n)$

2). ур-е $f(x) = 0$ каким-либо другим образом трансформируют к виду:

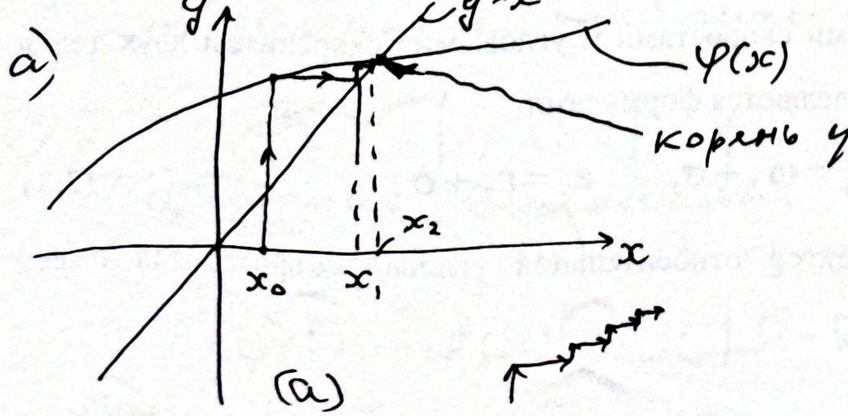
$$x = \varphi(x) \Rightarrow x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

После получения связи

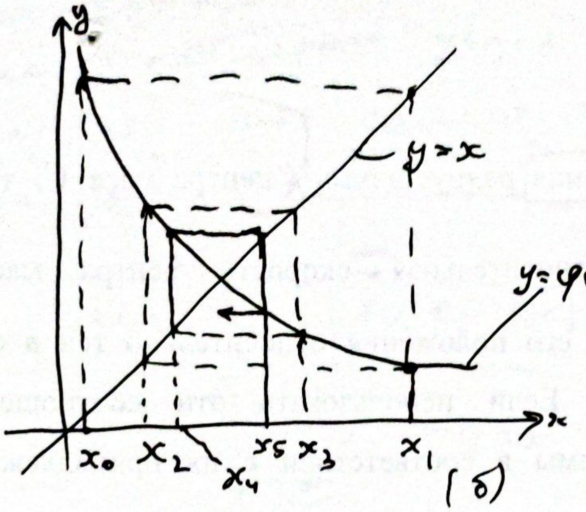
$$x = \varphi(x)$$

легко видеть геометрическую интерпретацию:

а)



Случай: $0 < \varphi'(x) < 1$



(б)

Случай: $-1 < \varphi'(x) < 0$

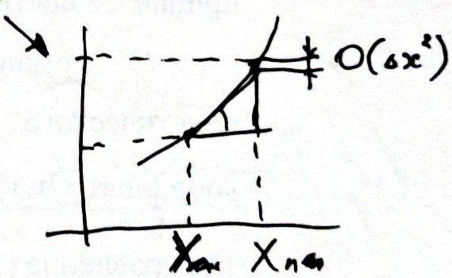
Однако, ~~...~~ представить ур-е $x = \varphi(x)$ в виде:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$x_{n+1} - X = \varphi(x_n) - \varphi(X)$$

где $X = \varphi(X)$ — точное решение ур-я

$$\varphi(x_n) - \varphi(X) \sim \Delta\varphi \sim \varphi'(x_n - X) \Rightarrow$$



$$\boxed{x_{n+1} - X \sim \varphi'(X)(x_n - X)}$$

$$|x_{n+1} - X| \sim |\varphi'(x)(x_n - X)|$$

$$|x_{n+1} - X| \sim |\varphi'(x)|\,|x_n - X|$$

Т.е. "расстояние" между точным корнем и приближением x_{n+1} будет убывать по сравнению с этим расстоянием на предыдущем приближении только тогда, когда

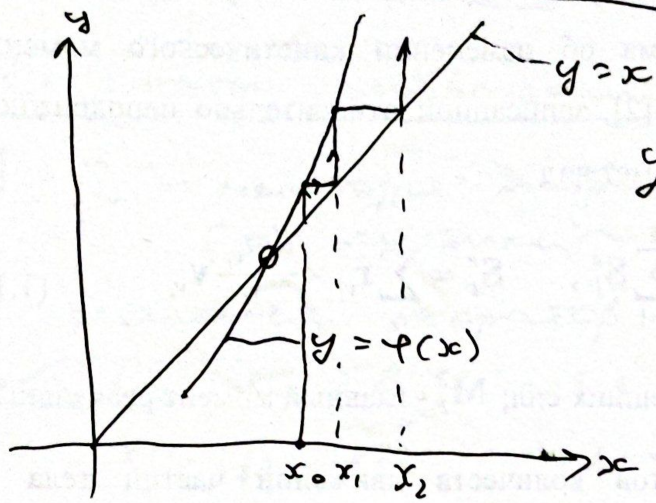
$$|\varphi'(x)| < 1.$$

Т.о. должно выполняться условие Липшица с константой меньше единицы:

$$|\varphi(\tilde{\tilde{x}}) - \varphi(\tilde{x})| \le K\,|\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}|.$$

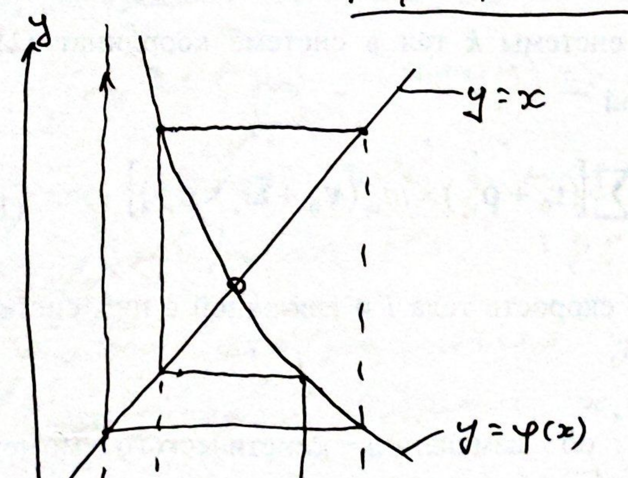
Если последнее усл-е не выполн. (или, что тоже самое, что $|\varphi'(x)| > 1$), то будет след. картина:

(в): Случай: $\boxed{1 < \varphi'(x)}$



Уходим от точного корня.

(г): Случай: $\boxed{\varphi'(x) < -1}$



Уходим от корня

Т.о. необходимо задавать вид ур-я

$x = \varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x)| < 1$.

Т.е. это условие следует учитывать при трансформации ур-я $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$. ~ на интервале локализированного корня, т.е. не везде. !

Вообще трансформация ур-я (6,4)

$f(x)=0$ к ур-ю $x=\varphi(x)$

и итерации вида

$x_{n+1}=\varphi(x_n)$ представляет

собой метод простой итерации.

О сжатых отображениях

Пусть R — некоторое метрическое пространство (есть метрика) ~ $\rho(x,y)$ ~ расстояние от x до y.

Пусть имеется оператор $\varphi(\cdot)$, осуществляющий отображение R в себя:

$\varphi: R\to R$. И пусть есть число $\alpha<1$ (положительное).

Если при этом для $\forall (x,y)$ $x\in R$, $y\in R$ выполняется усл-е:

$$\rho(\varphi(x),\varphi(y))\le\alpha\,\rho(x,y),$$ то

оператор $\varphi(\cdot)$ наз-ют сжимающим,

а отображение $\varphi:R\to R$ — сжатым.

Сжатое отображение уменьшает расстояние между элементами x,y, сближает их.

Теорема Если отображение $\varphi:R\to R$ сжатое, то уравнение $x=\varphi(x)$ имеет решение X и

$$\boxed{\rho(X,x_n)\le\frac{\alpha^n a}{1-\alpha}},\quad \text{где } a=\rho(x_0,x_1).$$

$x_1=\varphi(x_0)$

$x_2=\varphi(x_1)$

$\dots$

$x_n=\varphi(x_{n-1})$

очень хорошая оценка для погрешности на шаге n.

Метод прост. итер. для систем нелин. ур-й и схема Зейделя!

Об итерационных методах высших порядков.

Дано ур-е $x = \varphi(x)$ и

итерационная формула: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Пусть ур-е имеет корень X, а $\varphi(x)$ удовлетворяет усл-ю Липшица.

Будем говорить, что итерационный метод имеет порядок m, если

$$\varphi'(X) = \varphi''(X) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(X) = 0,$$

$$\varphi^{(m)}(X) \neq 0.$$

в корне X.

Метод Чебышева постр. итераций высших порядков.

Дано ур-е $f(x) = 0$ и корень $x = X$ локализован на отрезке $[a, b]$.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ вместе со своими производными достаточно высокого порядка и $f'(x) \neq 0$ на всем $[a, b]$.

При этих предположениях ф-ция $y = f(x)$ имеет обратную ф-цию $x = F(y)$, определенную на отрезке $[c, d]$, являющимся областью значений ф-ции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Ф-ция $F(y)$ имеет столько же непрерывных производных, сколько и $f(x)$.

Так как $x \equiv F(f(x))$ $(x \in [a, b])$

~~[illegible]~~ $y \equiv f(F(y))$ $(y \in [c, d])$, то

6.6

$X = F(0)$, т.к. имеется ур-е $f(X)=0$, которое выполняется в корне X.

Разложим $F(y)$ в р. Тейлора $\underbrace{}_{\text{Маклорена}}$ на отрезке $y\in[c,d]$:
в окрестности нуля

$$F(y) = F(0) + F'(0)y + \frac{F''(0)}{2!}y^2 + \ldots + \sum_{i=3}^{\infty}\frac{F^{(i)}(0)}{i!}y^i =$$

$$= F(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F^{(i)}(0)}{i!}y^i = F(0)+\sum_{i=1}^{r} \frac{F^{(i)}(0)}{i!}y^i + R^{(r+1)}$$

$R^{(r+1)}$ – остаточный член

$R^{(r+1)} = \dfrac{F^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}y^{r+1}$ – ост. член в форме Лагранжа

$F(y) = x \qquad y = f(x)$

$F(0) = X$

$$F(0) = F(y) - \sum_{i=1}^{r} \underline{\quad} - R^{(r+1)}$$

$$X = x - \sum_{i=1}^{r} - R^{(r+1)}$$

степень

Введем ф-цию $\varphi_r(x) = x - \sum_{i=1}^{r} \dfrac{F^{(i)}(y)}{i!}y^{i} =$

$$= x - \sum_{i=1}^{r} \frac{F^{(i)}(f(x))}{i!}(f(x))^i \qquad (*)$$

6.7

Подставим в $\varphi_r(\cdot)$ корень X:

$$\varphi_r(X) = X - \sum \frac{F^{(i)}(f(X))}{i!}(f(X))^i$$

т.к. $f(X) = 0$, то $\Rightarrow$

$$\varphi_r(X) = X$$

Следовательно уравнение

$\varphi_r(x) = x$ имеет корень $x = X$,

как и ур-е $f(x) = 0$.

Теперь положим итерационную формулу:

$$x_{n+1} = \varphi_r(x_n), \text{ где } x_0 \in [a, b]$$

Мы получим метод $(r+1)$-го порядка, т.к.

$$\varphi_r^{(l)}(X) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, r).$$

$$\varphi_r'(X) = 1 - F''(f(x))f'(x)\cdot f(x) - F'(f(x))\cdot f'(x) - \ldots$$

Функцию $\varphi_r(x)$ можно получить в явном виде, используя соотношения:

$i=1$

$$x = F(f(x)) \quad (1) \qquad y = f(F(y)) \quad (2)$$

Дифференцируем (1) по x:

$$F'(f(x))f'(x) = 1 \quad (3)$$

$$F''(f(x))(f'(x))^2 + F'(f(x))f''(x) = 0 \quad (4)$$

$$F'''(f(x))(f'(x))^3 + 3F''(f(x))f'(x)f''(x) + F'(f(x))f'''(x) = 0 \quad (5)$$

$\ldots$

Пр1. Пусть $r=1$ $\Rightarrow$ Из общей формулы (*): 6.8

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_r(x) = \varphi_1(x) = x - F'(f(x))\cdot f(x) \\ &\text{Из (3)} \Rightarrow F'(f(x)) = 1/f'(x) \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow$$

Итерационная формула:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$ – ф-ла Ньютона.

Пр2 Пусть $r=2$

$$\varphi_2(x) = x - F'(f(x))f(x) - \frac{F''(f(x))}{2}(f(x))^2$$

$$\text{Из (4)} \Rightarrow F''(f(x)) = -\frac{F'(f(x))\,f''(x)}{(f'(x))^2} = -\frac{1}{f'(x)}\,\frac{f''(x)}{(f'(x))^2} =$$

$$= -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

$$\varphi_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{f''(x)\,(f(x))^2}{(f'(x))^3}$$

Замечание: У меня получены формулы с другими знаками, чем в Бердин И.С., Жидков Н.П. "Методы вычислений" - II стр. 142.

Некоторые особенности решения систем нелинейных трансцендентных уравнений

6.9

Пусть дана система

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$$

векторный вид

1). Метод простой итерации.

сводим систему к виду

$$x = g(x)$$

$$\{ x_i = g_i(x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, \dots, n.$$

№ итерации.

Итерац. формула $\Rightarrow x^{n+1} = g(x^n)$

т.е.
$$\begin{cases} x_1^{m+1} = g_1(x_1^m, \dots, x_n^m) \\ \vdots \\ x_n^{m+1} = g_n(x_1^m, \dots, x_n^m) \end{cases}$$

Если отображение $g_i : R^n \to R^n$ сжимающее, то метод сходится, причем по-прежнему справедлива оценка:

$$\rho(X, x^m) \le \frac{\alpha^n a}{1 - \alpha}$$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ — точное реш-е.

, $a = \rho(x^1, x^0)$

$\alpha \Rightarrow$: удовлетворяет $\rho(g(x), g(y)) \le \alpha \rho(x, y)$. } константа Липшица для $g(x)$

Метод Ньютона для системы ур-й

6.10

√ Дана система:

$$F(x)=0 \longleftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ F_n(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$

и чувство достаточно хорошее начальное приближение $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)^T$.

Если ф-ции F_i непрерывно дифференцируемы в окрестности $x^0 \Rightarrow$

$$F_i(x_1^0+\delta_1,\dots,x_n^0+\delta_n)=F_i(x_1^0,\dots,x_n^0)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j}\bigg|_{x^0}\cdot\delta_j+O(\|\delta\|) \sim$$

ряд Тейлора...

$$x^0+\delta=x^1 \qquad \overset{\text{вектор}}{\delta=x^1-x^0} \Rightarrow$$

$$F_i(x^1)=F_i(x^0)+F_i'(x^0)\cdot(x^1-x^0)+O(\|x^1-x^0\|)$$

Если писать в векторном виде:

$$\begin{bmatrix}F_1(x^1)\\ \vdots \\ F_n(x^1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_1(x^0)\\ \vdots \\ F_n(x^0)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x^0} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_{x^0}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\Big|_{x^0} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Big|_{x^0}\end{bmatrix}}_{\text{матрица Якоби, выч. в точке } x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)}\cdot\begin{bmatrix}x_1^1-x_1^0\\ \vdots \\ x_n^1-x_n^0\end{bmatrix}+O(\|\cdot\|)$$

Свернем:

$$F(x^1)\cong F(x^0)+\boxed{F'(x^0)}(x^1-x^0)+\cancel{O(\|\cdot\|)} \qquad (*)$$

Теперь, вообще говоря, можно записать (*) просто для двух любых "соседних" точек x^{i+1} и x^i в предположении, что F дифф-ма в x^i:

$$F(x^{i+1}) \approx F(x^i) + F'(x^i)(x^{i+1} - x^i) \qquad (**)$$

Будем считать, что итерац. процесс сходится и, следовательно для больших номеров i

$$F(x^{i+1}) \to 0, \text{ т.к. } x^{i+1} \to X$$

стремится к точному решению, а

$$F(X) = 0$$

$$(**) \Rightarrow \quad 0 \approx F(x^i) + F'(x^i)(x^{i+1} - x^i) \qquad (***)$$

Вычислим обратную матрицу к матрице Якоби в точке $x^i \Rightarrow \left(F'(x^i)\right)^{-1}$ и умножим слева на нее (***):

$$0 \approx \left(F'(x^i)\right)^{-1} F(x^i) + (x^{i+1} - x^i) \Rightarrow$$

$$\boxed{x^{i+1} \approx x^i - \left(\underline{F'(x^i)}\right)^{-1} \cdot F(x^i)}$$ — формула Ньютона.

Если в матрице Якоби заменить производные $\left.\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right|_{x^i}$ их разностными аналогами:

$$\cancel{\left.\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right|_{x^i} \approx f_k(x^i + \varepsilon_j) - f_k(x^i)}$$

$$\left.\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right|_{x^i} \approx \frac{f_k(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_j^i + \varepsilon, \ldots x_n^i) - f_k(x^i)}{\varepsilon},$$

то получим формулу "секущих" $\Rightarrow$ нет нужды в аналитическом дифференцировании.

<u>Комментарий</u> (6.11.1)

Существует необходимость в обращении матрицы Якоби $\Longrightarrow$ большой объем вычислений, связанный с решением n систем лин. ур-й из n ур-й каждая.

Запишем аналог формулы (***):

$$F'(x^i)(x^{i+1}-x^i) \cong -F(x^i) \quad (****)$$

Пусть $x^{i+1}-x^i = \delta = \begin{pmatrix}\delta_1\\ \vdots \\ \delta_n\end{pmatrix}$ – вектор "неизвестных" приращений x^i,

Тогда:

$$F'(x^i)\delta = -F(x^i) \quad \text{– СЛАУ относительно } \delta$$

Решаем ее и получаем все $\delta_j \Rightarrow \boxed{x_j^{i+1} = x_j^i + \delta_j}$

Проверяем выполнение условия

$\forall_j \ |\delta_j| < e$ (абс. ошибка) | или | $\forall_j \ \left|\frac{\delta_j}{x_j}\right| < e$ (относит. ошибка)

Если они не вып-ся: $i \leftarrow i+1$ и идем к р-ле (****).

Метод градиентного спуска

Рассмотрен ранее в разделе решение СЛАУ как метод минимизации некоторой "присоединенной" функции $\Phi(x_1, \dots x_n)$, причем была справедлива формула:

$$x^{m+1} = x^m - \Delta_m \operatorname{grad} \Phi(x^m)$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{m+1} \\ \vdots \\ x_n^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{bmatrix} - \Delta_m \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi(x_1^m, \dots, x_n^m)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi(x_1^m \dots x_n^m)}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \text{ где}$$

величина Δ_m определялась из усл-я:

$$\Phi(x^m - \Delta_m \operatorname{grad} \Phi(x^m)) \longrightarrow \min_{\Delta_m}$$

Как выбрать ф-цию $\Phi(x_1 \dots x_n)$?

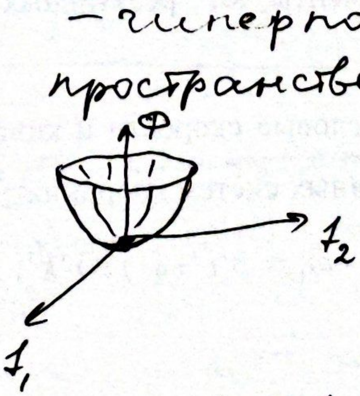
Дана система ур-й:

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ f_2(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

Пусть $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i f_1(x))^2$

$\lambda_i = const$ – весовые коэффиц-ты.

Очевидно, что ~~…~~ теперь $\Phi(x)$ – гиперпараболоид в пространстве $\{f_1(x), \dots f_n(x)\}$



$\Rightarrow$ Он имеет строгий min в точке $f_1 = 0$

$\vdots$

$f_n = 0$,

след. минимизируя Φ, мы приходим к точке $f_1 = 0 \dots f_n = 0$ и решаем исходную систе

Метод Лобачевского решения полиномиальных уравнений

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad (1)$$

Пусть о корнях известно, что все они действительны и удовлетворяют условию

$$|x_1| \gg |x_2| \gg \ldots \gg |x_n| \quad (2)$$

~ т.е. все „сильно разные" по модулю.

Существует следующая связь между корнями и коэффициентами:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1/a_0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots x_1x_n + x_2x_3 + \ldots x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2/a_0 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3/a_0 \\ \ldots \\ x_1x_2x_3x_4 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

В 1ом из равенств вынесем за скобки x_1:

$$x_1(1 + x_2/x_1 + \ldots + x_n/x_1) = -a_1/a_0$$

Будем считать, что $|x_1|$ настолько больше $|$ всех остальных$|$, что можно отбросить все величины $x_i/x_1 \Rightarrow$

$$x_1 \approx -a_1/a_0.$$

Далее выносим из второго равенства x_1x_2:

$$x_1x_2\left(1 + \frac{x_1x_3}{x_1x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}x_n}{x_1x_2}\right) = a_2/a_0 \Rightarrow$$

$$x_1x_2 \approx a_2/a_0 \Rightarrow x_2 \approx \frac{a_2}{a_0}/x_1 = -\frac{a_2}{a_1}$$

$$\text{и т.д.}: \Rightarrow \boxed{x_i \approx -a_i/a_{i-1}} \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Лобачевский предложил ~~из ур-я (1)~~ получать другое ур-е, корни которого равны квадратам корней исходного ур-я.

Если исходное ур-е имело разные по величине корни, то применяя такую трансформацию

7.2

необходимое число раз, получим ур-е, удовлетворяющее условию (2).

$$(1) \Rightarrow \quad a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0 \quad (3)$$

У ур-я $\quad a_0(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)=0 \quad (4)$

корни противоположны по знаку корням ур. (3)

$$(3)\cdot(4) \Rightarrow$$

$$a_0^2(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\cdots(x^2-x_n^2)=0$$

Пусть $z=x^2 \Rightarrow a_0^2(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)=0$, где $z_i=x_i^2$

Назовем указанный процесс <u>квадрированием</u>.

Если есть ур-е $f(x)=0$, то у ур-я $f(-x)=0$ будут корни, противоположные по знаку

У нас $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=P_n(x)$

Перемножим $P_n(x)=0$ и $P_n(-x)=0$, тогда это и есть операция квадрирования:

$$P_n(-x)=a_0(-x)^n+a_1(-x)^{n-1}+\ldots+a_n=$$

$$=a_0(-1)^nx^n+(-1)^{n-1}a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

$$P_n(x)P_n(-x)=a_0^2(-1)^nx^{2n}+(-1)^{n-1}(a_1^2-2a_0a_2)x^{2n-2}+$$

$$+(-1)^{n-2}(a_2^2-2a_1a_3+2a_0a_4)x^{2n-4}+\ldots+a_n^2=0$$

Умножим последнее выр-е на $(-1)^n$:

$$(-1)^{2n}\underbrace{a_0^2}_{b_0}x^{2n}+(-1)^{2n-1}\cdot\underbrace{(a_1^2-2a_0a_2)}_{b_1}x^{2n-2}+(-1)^{2n-2}\underbrace{(a_2^2-2a_1a_3+2a_0a_4)}_{b_2}x^{2n-4}+\ldots+(-1)^na_n^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$(-1)^{2n}b_0x^{2n}+(-1)^{2n-1}b_1x^{2n-2}+(-1)^{2n-2}b_2x^{2n-4}+\ldots+(-1)^{2n-i}b_ix^{2n-2i}+\ldots+$$

$$+(-1)^{2n-n}b_n=0$$

Теперь положим $x^2 = z \Rightarrow$ 7.3

$$(-1)^{2n} b_0 z^n + (-1)^{2n-1} b_1 z^{n-1} + \ldots + (-1)^n b_n = 0 \quad (5)$$

$$b_j = a_j^2 - 2a_{j-1}a_{j+1} + 2a_{j-2}a_{j+2} - 2a_{j-3}a_{j+3} + \ldots +$$

$$+ (-1)^k 2a_{j-k}a_{j+k} + \ldots$$ сумма продолжается до тех пор, пока $j-k$ не даст „0" или $j+k$ не даст „n".

Перепишем ур-е (5) в виде:

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_n = 0 \quad (6),$$

где $\boxed{c_s = (-1)^{2n-s} b_s}$

c_s - коэфф-ты квадрированного ур-я (1)

$$\Rightarrow \quad z_i \approx -c_i / c_{i-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_i \approx \pm\sqrt{z_i}$$

$\pm$? $\Leftrightarrow$ проверка

Сколько раз квадрировать? ($c \sim z \to d \sim u$)

$d_j \leftarrow c_j$ при очередном квадрировании

Если $d_j \approx c_j^2$ то уже выполняются усл-я (2) для „u".

Если имеются комплексно-сопряженные корни? (7.4)

Пусть произведено m квадрирований исходного ур-я, имеющего компл.-сопр. пару корней

$$x_2 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$x_3 = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

например, т.е. имеет место располож-е корней:

$$|x_1| > |x_2| = |x_3| > |x_4| > \ldots > |x_n|$$

$$\Rightarrow \ldots \begin{cases} x_1^k \simeq -c_1/c_0 \\ x_1^k \rho^{2k} \simeq c_2/c_0 \\ \ldots \\ x_1^k \rho^{2k} x_4^k \cdots x_n^k = c_n/c_0 \, (-1)^n \end{cases} \qquad k = 2^m$$

$$\to \{x_i, \rho\}$$

Исходная система:

$$\underset{=}{x_1} + \underbrace{x_2 + x_3}_{2\rho\cos\varphi} + \underset{=}{x_4} + \ldots + \underset{=}{x_n} = -a_1/a_0$$

известны $\Rightarrow$ ур-е относит. φ:

$$\boxed{\nu\cos\varphi = \mu}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \mu/\nu}$$

~~$\varphi = \arccos(\mu/\nu)$~~

[illegible] Пусть (+)

Некоторые соображения по определению комплексных корней уравнений и систем

8.1

$$f(z)=0 \Rightarrow f(x+iy)=0 \Rightarrow f_{Re}(x,y)+f_{im}(x,y)\,i=0$$

$$\begin{cases} f_{Re}(x,y)=0 \\ f_{im}(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow x,\,y. \leftarrow$$ стандартными итерационными методами.

Т.о. необходимо выделить действит. и мнимую части и решить систему.

Пр. $az^2+bz+c=0$ $\quad z=x+iy \longrightarrow:$

$$a(x^2+2xyi-y^2)+b(x+iy)+c=0$$

$$\underbrace{\left[a(x^2-y^2)+bx+c\right]}_{f_{Re}(x,y)}+\underbrace{\left[2axy+by\right]}_{f_{im}(x,y)}i=0$$

$$\begin{cases} a(x^2-y^2)+bx+c=0 & (1) \\ 2axy+by=0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow$ а). $y=0$; б). $x=-\frac{b}{2a}$ $\longrightarrow (1)$: а). $ax^2+bx+c=0$; б). $a\left(\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-y^2\right)-\frac{b^2}{2a}+c=0$

$$\Downarrow$$

$$-ay^2=-c+\frac{b^2}{4a}$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=$$

$$=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{4ac-b^2}, \Rightarrow z=-\frac{b}{2a}\pm i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$z=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Вообще получили вывод формулы для корней квадратного ур-я. !

3). После вычисляется матрица $A^{(k+1)}$:

$$A^{(k+1)} = U^{(k)^T} \cdot A^{(k)} \cdot U^{(k)}$$ и в ней $a_{ij}^{(k+1)} = 0$.

4). Повторяется действия 1) - 3).

Критерий остановки итераций ~ условие малости $\sqrt{\text{суммы квадратов}}$ внедиагональных эл-тов:

$$\rho^{(k+1)} = \left[\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \left(a_{ij}^{(k+1)}\right)^2\right]^{1/2}$$

Если $\rho^{(k+1)} > \varepsilon \Rightarrow$ итерации продолжают.

Если $\rho^{(k+1)} < \varepsilon \Rightarrow$ STOP.

В итоге:

$$\Lambda \cong A^{(k+1)} = \underbrace{U^{(k)^T} U^{(k-1)^T} \cdot \ldots \cdot U^{(0)^T}} \cdot A \cdot \underbrace{U^{(0)} \cdot U^{(1)} \cdot \ldots \cdot U^{(k)}}_{U}$$

$$\Lambda \rightarrow \begin{cases} \lambda_{11} = \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{nn} = \lambda_n \end{cases}$$

$U \rightarrow$ в столбце S стоит собств. вектор для λ_S.