Методы вычислений

I семестр.
(III курс - весна)
135, 136 гр.

Лекция 1: Предмет численных методов. Характеристика числ. методов. Классификация и источники погрешностей. (1.1) (1)

a - абс. точная известная из наблюдений с помощью идеальных приборов величина

$\bar{a}$ - величина, следующая из математич. модели рассматриваемого процесса /абсолютно точная/

$\bar{a}_h$ - абсолютно точная величина, следующая из формул численного метода в приложении к рассм. мат. модели

$\bar{a}_h^*$ - величина, вычисленная на ЭВМ по формулам числ. метода (следовательно:
- были усечены иррациональности: $\pi = \underline{3.1415}\cancel{6}\ldots$
- были ошибки округления
- прочие неточности, такие как начальные ошибки исходных данных, либо их инициализация в ЭВМ).

Тогда:

$$\rho_1 = \bar{a} - a$$ — погрешность НЕУСТРАНИМАЯ

$$\rho_2 = \bar{a}_h - \bar{a}$$ — погрешность числ. метода

$$\rho_3 = \bar{a}_h^* - \bar{a}_h$$ — вычислительная погрешность

$$\rho_0 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \bar{a}_h^* - a$$ — полная абс. погрешность процесса

$$\Delta = \bar{a}_h^* - \bar{a}$$ — абс. погрешность модели

$$\delta = \frac{\overline{a}^*_h - \overline{a}}{\overline{a}^*_h}$$ – относительная погрешность.

Переходят к абсолютным значениям:

$$\Delta = |\overline{a}^*_h - \overline{a}|; \quad \delta = \left|\frac{\overline{a}^*_h - \overline{a}}{\overline{a}^*_h}\right|.$$

Итак,

ρ_2 связана с неточностью представления мат. модели с помощью упрощений численными методами.

ρ_3 связана с „вычислительными" проблемами:

- конечноразрядность ЭВМ
- округления
- неправильность группировок операций:

1) $a \cdot b + c \cdot b \longrightarrow \varepsilon_1$

2) $(a+c) \cdot b \longrightarrow \varepsilon_2$

$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$!, т.к

при 1) – $2^{а}$ умнож-я и 1 сложение $\Rightarrow$ 3 операции

при 2) – 1 умнож. и 1 слож-е $\Rightarrow$ 2 операции. $\Rightarrow$ меньше округлений и потерь точности

ρ_1 можно использовать при анализе адекватности мат. модели:

Пр. $k_1(x) u_{xx} + k_2(x) u_{yy} = 0$

Если $k_{1,2}(x)$ заданы извне с точностью 0,01, то не следует решать ДУЧП с точностью, превышающей 0.01 !

<u>Пример</u> для характеристики ρ_2 и ρ_3:

Рассмотрим вычисление e^x на ЭВМ.

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots\infty$$ — абс. точное разложение

Как реализовать вычисление?

<u>1 путь</u>: Отбросим члены, выше n-го порядка:

$$\overline{(e^x)} \approx 1+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

В этом случае имеем, что абс. точное значение e^x отличается от $\overline{(e^x)}$ — его приближенного метода определения на величину $O\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)$.

Т.е.

$$\rho_2 \cong O\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$ (Причем пока не вычислили на ЭВМ!)

<u>2 путь</u>: Производить вычисления с пошаговым добавлением последующих членов, пока не выполнится требования абс. погрешн.:

$$|e^x_n - e^x_{n-1}| \le \varepsilon$$, где

$$e^x_n = 1+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

$$e^x_{n+1} = 1+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Т.к. ряд сходится равномерно $\Rightarrow$

$\Delta = \varepsilon \Rightarrow$ Описали ошибку ρ_2 и ρ_3 совместно

$$\Delta = \rho_2 + \rho_3.$$

Численные методы алгебры : (2.1)

1). Решение СЛАУ
2). Обращение матриц
3). выч-е определителей
4). нахождение собственных значений и векторов матриц
5). вычисление корней многочленов

Методы решения СЛАУ

I). Исключ-е переменных методом Гаусса.

II). Простые итерации.

I). М. Гаусса :- вывод формул триангуляризации матриц коэффициентов
- метод Гаусса с ведущими элементами
  └ избавление от нулей на гл. диагонали: в строке ищется $\max|a_{ij}|$ и осуществл-ся перестановка столбцов / ⇒ меняется порядок в векторе неизвестных $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

II). $A \cdot x = b$ (*)

Идея : записать ур-е в виде $x = f(x)$

$$(*) \Rightarrow \left.\begin{matrix} (Ax - b) = 0 \Rightarrow D(Ax-b) = 0 \\ x - x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x - x = D(Ax - b)$$

$$\Downarrow$$

$$x = x + D(Ax - b)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = Bx + c}$$

(**) $\boxed{x^{(i+1)} = Bx^{(i)} + c}$ итерац-я формула $\begin{cases} B = (E + DA) \\ c = -Db \end{cases}$

Теорема:

Итерационный процесс (**) сходится тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B по модулю меньше 1.

Рецепты: Как выбрать D?

1). найти $\max|a_{ij}|$ и перейти к нормированной системе: $\bar{A}x = \bar{b}$, где

$$\bar{A} = \frac{1}{\max|a_{ij}|}\cdot A; \quad \bar{b} = \frac{b}{\max|a_{ij}|}$$

Тогда все эл-ты $\bar{a}_{ij} \le 1$

2). Выбрать матрицу D так, чтобы собств. знач-я матрицы $[E + D\bar{A}] = B$ не превышали по модулю 1.

$$D = \begin{bmatrix} 0.01 & & & 0 \\ & 0.01 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0.01 \end{bmatrix}$$, тогда можно ожидать, что условия теоремы вып-ся:

$$B = \begin{bmatrix} 1 + 0.01\bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & 1 + 0.01\bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \dots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & & & \\ \bar{a}_{n1} & \dots & \dots & 1 + 0.01\bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

или даже $D = \begin{bmatrix} -0.01 & & \\ & -0.01 & \\ & & \ddots \\ & & & -0.01 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$B = \begin{bmatrix} 1 - 0.01\bar{a}_{11} & \dots & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

Хар-е ур-е:

$$(1 - 0.01\bar{a}_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (1 - 0.01\bar{a}_{nn} - \lambda) + \ldots = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_i}}$$

Триангуляризация Гаусса

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{вниз}]{\downarrow\Delta\text{ - сверху -}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \tilde a_{22} & \dots & \tilde a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots 0 & \dots 0 & \tilde a_{nn} \end{bmatrix}$$

На 1-ом проходе

$$\begin{cases} \tilde a_{ij} = a_{ij}^{(0)} - a_{i1}^{(0)} \cdot \dfrac{a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \\ i = 2..n \\ j = 1..n \end{cases}$$

т.е. взяты 0-раз переприсвоенные коэффициенты т.е. НАЧАЛЬНЫЕ

массив $\{a_{ij}\}$ переприсвоен/изменен

...

На k-ом шаге/проходе

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

верхний индекс символизирует, что идет уже (k) пересчет коэффициентов

в программе нет этого отслеживания, просто идет процедура переприсваивания

Эта операция идет во вложенных циклах:

$k = \overrightarrow{1..(n-1)}$

$i = \overrightarrow{(k+1)..n}$

$j = \overleftarrow{k..n}$

```
Program Triangl;
Var n, i, j, k : integer;
a: array [1..10, 1..10] of real;
Begin
n:=10;
for i:=1 to n do for j:=1 to n do
        readln a[i,j]; // ввод массива

  for k:=1 to (n-1) do
     for i:=(k+1) to n do
{B; for j:=n downto k do
a[i,j]:=a[i,j]-a[i,k]*a[k,j]/a[k,k];}
   ...
```

спуск вниз по индексу j нужен, т.к. иначе если j:=k to n, то сразу после j=k в k эл-т будет ноль

Для СЛАУ нужно еще на каждом проходе пересчитывать компоненты вектора правых частей ($Ax=b$)

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Далее аналогичная процедура триангуляризации снизу-вверх $\Delta\uparrow$

$\begin{bmatrix} \diagdown & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} \longrightarrow x_i = b_i / a_{ii}$

Метод Гаусса решения СЛАУ

(2.1.1)

$$Ax = b \qquad A \to \bar{A}\begin{bmatrix} \ddots & \equiv \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}; \quad b \to \bar{b}$$

триангуляризация $A \longrightarrow \bar{A}$.

$A[n,n]$

Формулы триангуляризации $\downarrow$:

Проходов: $k = 1\,..\,(n-1)$

$i = (k+1)\,..\,n$

$j = k\,..\,n$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}; \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Ф-лы триангуляризации $\uparrow$:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{iR}^{(k-1)} a_{Rj}^{(k-1)}}{a_{RR}^{(k-1)}}; \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{iR}^{(k-1)} \dfrac{b_R^{(k-1)}}{a_{RR}^{(k-1)}} \\ R = n-k+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 1\,..\,(n-1) \\ i = (n-k)\,..\,1 \\ j = (n-k+1)\,..\,1 \end{cases}$$

Тогда после $\Delta\downarrow$ и $\Delta\uparrow$:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = 1\,..\,n \quad \longleftarrow$$ решение исходной СЛАУ.

Замечание 1

Если эл-ты какой-либо строки матрицы системы в результате преобразований стали $= 0$, а правая часть $\neq 0$, то СЛАУ несовместна (не выполняются усл-я теоремы Кронекера-Капелли)

Зам. 2

Если эл-ты какой-либо строки стали $= 0$ и правая часть стала $= 0$, то СЛАУ совместна, но имеет ∞-множество решений, получающихся с помощью метода Гаусса для СЛАУ с рангом r.

Вычисление определителей (м. Гаусса)

$$A \longrightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} \ddots & \equiv \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

Если в процессе $\Delta\downarrow$ строки не переставлялись, что нужно было бы делать, если на главной диагонали возникает ноль, то

$$\det A = \det \bar{A} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{sp}\,\bar{A}$$

Обращение матриц

$$A^{-1} = ?$$

$$AX = E \qquad X = A^{-1} = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \\ \left[\begin{matrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{matrix} & \cdots & \left.\begin{matrix} x_1^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{matrix}\right] \end{array}$$

$$A x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{e1} \cdots \quad A x_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - en$$

При триангуляризации всегда только одна матрица: A.

Тогда обращение A:

$\Delta\downarrow$: $a_{ij}^{(k)}$ = item $\qquad b \to e1, e2, \dots en$

$$\begin{cases} e1_i^{(k)} = e_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \dfrac{e1_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \\ e2_i = \text{аналог.} \\ \vdots \\ en_i = \text{аналог} \end{cases}$$

для e1, ... en
м/зарезервировать
двумерный массив

e[i, j]

№ ei $\qquad$ элемент ei

потом $\Delta\uparrow$... аналогично...

Т.о. $2^е$ процедуры $\Delta\downarrow$ и $\Delta\uparrow$...

Разновидность методов простых итераций как линейных одношаговых методов явл-ся (3.1)

<u>Метод Зейделя решения СЛАУ.</u>

$A\bar{x} = b$

Идея: 1). A представл-ся суммой:

$$A = B + C + D$$

B - диагональн. матрица

C - ~~верхняя~~ нижняя треуг. матрица с нулями на главной диагонали $\begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ c_{ij} & & 0 \end{bmatrix}$

D - ~~нижняя~~ верхняя Δ — " — $\begin{bmatrix} 0 & & d_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$

2). Выбирают некоторое число $\omega \neq 0$.

3). Итерационный процесс идёт по формуле:

$$(\omega^{-1}B + C)\bar{x}^{(k+1)} + [(1-\omega^{-1})B + D]\bar{x}^{(k)} = b \quad (*)$$

Если разрешить (*) относительно $x_i^{(k+1)}$, то:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{\omega}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\underline{x_j^{(k+1)}} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right] - (\omega - 1)x_i^{(k)}$$

При выборе $\omega = 1$ получают классический метод Зейделя.

Видно, что от простых итераций м. З. отличается тем, что найденное след. приближ-е для младших $x_{i-\dots}^{(k+1)}$ сразу же подставляют в формулу для определения $x_i^{(k+1)}$!

Итерации идут до выполнения треб. точности.

Покажем справедливость и смысл формулы (*) м. Зейделя: 3,2

$$A\bar{x} = b$$

На старших итерациях можно приближенно указать, что $\bar{x}^{(k)} \approx x^{(k+1)}$

$$A = B + C + D$$

$$(B + C + D)\,\bar{x}^{(k+1)} = b$$

$$\left(\frac{B}{\omega} - \frac{B}{\omega} + B + C + D\right)\bar{x}^{(k+1)} = b$$

$$\left(\frac{B}{\omega} + C\right)\bar{x}^{(k+1)} + \left(B - \frac{B}{\omega} + D\right)\bar{x}^{(k+1)} = b$$

$$\left(\frac{B}{\omega} + C\right)\bar{x}^{(k+1)} + \left(\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)B + D\right)\bar{x}^{(k)} = b \qquad (**)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}/\omega & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_{nn}/\omega \end{bmatrix}\bar{x}^{(k+1)} + \begin{bmatrix} a_{11}\left(1-\frac{1}{\omega}\right) & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\left(1-\frac{1}{\omega}\right) \end{bmatrix}\bar{x}^{(k)} = b$$

т.к.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Когда $\omega = 1$ т.е. когда используют метод Зейделя (**) запишется в виде:

$$(B + C)\,\bar{x}^{(k+1)} + D\,\bar{x}^{(k)} = b$$

$$\Rightarrow \bar{x}^{(k+1)} = \underbrace{(B+C)^{-1}b}_{d} \underbrace{- (B+C)^{-1}D}_{M}\,\bar{x}^{(k)}$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = M\bar{x}^{(k)} + d$$

Последняя ф-ла есть метод простых итераций.

Исходя из этого можно указать условие сходимости м. З: (3.3)

Собств. числа матрицы M д/б $|\lambda_i|<1$ $\forall i$.

Т.е.

$$|M - E\lambda| = 0 \Rightarrow |E\lambda + (B+C)^{-1}D| = 0$$

Корни последнего ур-я будут совпадать с корнями ур-я:

$$|\lambda(B+C) + D| = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Доказана теорема ~~З.м.~~ о сходимости м. З:

Для сходимости м. З $\Longleftrightarrow$ чтобы все корни ур-я

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij}\lambda & & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

по модулю были < 1.

Метод З. дает более быструю сходимость чем метод простых итераций?

Теорема: без док.

М. Зейделя всегда сходится для нормальных СЛАУ.

Норм. СЛАУ — это такая СЛАУ, если ее матрица A симметрична ($A = A^T$) и положительно определена (т.е. когда квадратичная форма $(Ax, x) > 0$, или, когда все собств. числа > 0).

Из $\forall$ невырожденной ($\det \neq 0$) матрицы можно сделать нормальную, домножив ее на транспонированную слева.

$A^T A$ — норм.

1) Пусть исх. СЛАУ: $Ax = b$

2) нормализуем: $A^T A x = A^T b$

$B = A^T A$; $c = A^T b$

3) СЛАУ $Bx = c$ — нормальная — м. Зейделя заведомо сходится!

"Метод квадратного корня" при решении СЛАУ с симметрической матрицей коэффициентов

$$Ax = b$$

Идея: 1) Представим $A = LL'$

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ddots & 0 \\ \alpha_{ij} & \ddots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \text{ – нижнетреуг.}$$

$$L' = L^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ddots & \alpha_{ij} \\ 0 & \ddots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Т.е. $\exists\ n = 4$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{43} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{bmatrix}$$

эти эл-ты

$\Downarrow$ Распишем

$$\begin{cases} a_{11} = \alpha_{11}^2; \quad a_{12} = \alpha_{11}\alpha_{21}; \\ a_{13} = \alpha_{11}\alpha_{31}; \quad a_{14} = \alpha_{11}\alpha_{41} \\ a_{22} = \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2; \quad a_{23} = \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} \\ a_{24} = \alpha_{21}\alpha_{41} + \alpha_{22}\alpha_{42}; \quad a_{33} = \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 \\ a_{34} = \alpha_{31}\alpha_{41} + \alpha_{32}\alpha_{42} + \alpha_{33}\alpha_{43}; \\ a_{44} = \alpha_{41}^2 + \alpha_{42}^2 + \alpha_{43}^2 + \alpha_{44}^2 \end{cases}$$

В последней системе последовательно определяем α_{ij} :

3.5

$$\alpha_{11} = \sqrt{a_{11}} \; ; \quad \alpha_{21} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \; ; \quad \alpha_{31} = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} \quad \alpha_{41} = \frac{a_{14}}{\sqrt{a_{11}}}$$

$$\alpha_{22} = \sqrt{a_{22} - \alpha_{21}^2}$$

$$\alpha_{32} = \frac{a_{23} - \alpha_{21}\alpha_{31}}{\alpha_{22}} \; ; \quad \alpha_{42} = \frac{a_{24} - \alpha_{21}\alpha_{41}}{\alpha_{22}}$$

$$\alpha_{33} = \sqrt{a_{33} - \alpha_{31}^2 - \alpha_{32}^2} \; ; \quad \alpha_{43} = \frac{a_{34} - \alpha_{31}\alpha_{41} - \alpha_{32}\alpha_{42}}{\alpha_{33}}$$

$$\alpha_{44} = \sqrt{a_{44} - \alpha_{41}^2 - \alpha_{42}^2 - \alpha_{43}^2}$$

⚠ Можно по индукции получить формулы для α_{ij} $\forall n$.

2). После вычисление α_{ij} имеем:

$$LL'x = b$$

введем новые переменные $y = L'x$

$$\Rightarrow \quad Ly = b$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ \alpha_{ij} & & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \longrightarrow y$$

$$\Rightarrow \quad L'x = y$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & & \alpha_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \longrightarrow x$$

Задача решена.

Разложение на треугольные множители-матрицы

$A = L \cdot L^T$; A - симметрическая положительно определенная матрица

нижняя Δ-я матрица

Δ - доп
к методу
$\sqrt{\cdot}$

Теорема Холецкого

Если A - симметрическая $\oplus$ определенная матрица, то $\exists$ действительная невырожденная нижняя Δ-ная L, такая, что

$$A = L \cdot L^T \quad (*)$$

Более того, если диагональные эл-ты матрицы L выбраны положительными, то разложение единственно.

Application: Эл-ты L можно определять по строкам или по столбцам, приравнивая соответствующие эл-ты матриц в выражении $(*)$.

Если вычислять по строкам, то для эл-тов i-той строки справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk} = a_{ij} \\ \text{или} \\ l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}, \quad j = 1, \dots, i-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{i} l_{ik} l_{ik} = a_{ii} \\ \text{или} \\ l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ для реализации этого расчета необходимо n действий извлечения $\sqrt{\cdot}$ и $\sim \frac{n^3}{6}$ умножений.

Итерационное уточнение решения СЛАУ с положительно определенной матрицей A

$$Ax = b$$

$A \longrightarrow$ схема Холецкого $\longrightarrow$ $A = LL^T$ (1)

1) Стартовое приближение: $x^{(0)} = 0$ (2)

2) Далее вычисляется невязка $r^{(s)} = b - Ax^{(s)}$ (3)
и поправка $d^{(s)}$: $(LL^T)\,d^{(s)} = r^{(s)}$ (4)

3) Корректируется x: $x^{(s+1)} = x^{(s)} + d^{(s)}$ (5)

это, конечно, перетяжеленный алгоритм, т.к. целесообразно сразу решать $(LL^T)x = b$ вместо прогонов (4) НО

Аналогичный алгоритм для уточнения результата обращения матрицы:

если $X^{(1)}$ - первонач. приближение обратной матрицы, то

$$X^{(s+1)} = X^{(s)} + X^{(s)}(I - AX^{(s)}) = X^{(s)} + X^{(s)}B^{(s)} =$$
$$= X^{(s)} + Z^{(s)}$$

$B^{(s)}$ - матрица невязок

Условия сходимости те же, что и для ал. СЛАУ, более того, если пренебречь ошибками округления, то справедливо соотношение:

$$I - AX^{(s+1)} = (I - AX^{(s)})^2$$

т.е. сходимость "квадратичная".

Метод ортогонализации при решении СЛАУ.

3.6

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (1)$$

вектор неизвестных $\bar{x}$ будем искать в виде

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{x}^{(k)}, \text{ где}$$

$\bar{x}^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}$ – n штук векторов, удовлетворяющих условиям:

$$(A\bar{x}^{(k)}, \bar{x}^{(l)}) = 0 \quad \text{при } k > l$$

$$k, l = 1 \ldots n.$$

скалярное произведение.

Тогда (1) можно ~~записать~~ преобразовать: к системе

$$\left\{ (A\bar{x}, \bar{x}^{(l)}) = (\bar{b}, \bar{x}^{(l)}) \quad l = 1, 2 \ldots n \right.$$

Подставим вид решения:

$$\left(A\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{x}^{(k)}, x^{(l)} \right) = (\bar{b}, \bar{x}^{(l)})$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (A\bar{x}^{(k)}, x^{(l)}) = (\bar{b}, \bar{x}^{(l)}) \quad (*)$$

Т.к. для $\forall k > l$ $(A\bar{x}^{(k)}, \bar{x}^{(l)}) = 0 \Rightarrow$

$\perp$ k – № строки l – № стб. $\Rightarrow$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & & B_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{nn} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{b}, \bar{x}^{(1)}) \\ \vdots \\ (\bar{b}, \bar{x}^{(n)}) \end{bmatrix}, \text{ где } B_{ij} = (A\bar{x}^{(i)}, x^{(j)})$$

$$\underset{kl}{B_{ij}}: \; i = k, \; j = l$$

Т.е. получили СЛАУ относительно α_k с треугольной матрицей коэффиц. B. $\Rightarrow \alpha_k$

Т.е. если известен базисный набор векторов решения $\bar{x}^{(k)}$, то исходные неизвестные станут известны:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{x}^{(k)}$$

Как найти $\bar{x}^{(k)}$ — ?

Исходим из какой-либо системы линейно независ. векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$:

$$\begin{cases} y^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^T \\ y^{(2)} = (0, 1, 0, \dots 0)^T \\ \dots \\ y^{(n)} = (0, 0, \dots, 0, 1)^T \end{cases}$$

Принимаем $x^{(1)} = y^{(1)}$, далее $x^{(2)}$ ищем в виде:

$$x^{(2)} = y^{(2)} + \lambda_1^{(2)} \bar{x}^{(1)}$$

и из усл-я ортогональности $(\underbrace{\bar{x}^{(2)}}_{l}, A\underbrace{\bar{x}^{(1)}}_{k}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1^{(2)} = -\frac{(y^{(2)}, A\bar{x}^{(1)})}{(\bar{x}^{(1)}, A\bar{x}^{(1)})}$$

Далее $\bar{x}^{(3)} = \bar{y}^{(3)} + \lambda_1^{(3)} \bar{x}^{(1)} + \lambda_2^{(3)} \bar{x}^{(2)}$

\+ усл-я $(\bar{x}^{(3)}, A\bar{x}^{(1)}) = 0$

$(\bar{x}^{(3)}, A\bar{x}^{(2)}) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1^{(3)} = -\frac{(\bar{y}^{(3)}, A\bar{x}^{(1)})}{(\bar{x}^{(1)}, A\bar{x}^{(1)})}$$

$$\lambda_2^{(3)} = -\frac{(\bar{y}^{(3)}, A\bar{x}^{(2)})}{(\bar{x}^{(2)}, A\bar{x}^{(2)})}$$

И т.д.

NOTE: После определ-я $\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(n)}$ надо провести ПЕРЕНУМЕРОВКУ: $x^{(1)} \leftarrow x^{(n)}, x^{(2)} \leftarrow x^{(n-1)}$

Релаксационный метод решения СЛАУ — итерационный метод

4.1

При решении СЛАУ иногда бывает целесообразно для упрощения вычислений изменить порядок уравнений в системе или нумерацию неизвестных. Можно даже пойти дальше и менять порядок ур-й на каждой итерации.

Итак, 1). выбираем начальное приближение $x^0=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ для СЛАУ $A\cdot x = b$.

2). Далее вычисляем "невязку":

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \dots + a_{1n}x_n^{(0)} - b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1^{(0)} + a_{n2}x_2^{(0)} + \dots + a_{nn}x_n^{(0)} - b_n \end{bmatrix}$$

3). Выбираем δ_i с наибольшим абс. значением: $|\delta_i| = \sup|\delta_j| = \cancel{\max}_{j=1..n}$

4). По найденному номеру i вычисляем $x_1^{(1)}$:

$$a_{i1}x_1^{(1)} + a_{i2}x_2^{(0)} + \dots + a_{in}x_n^{(0)} = b_i \Longrightarrow x_1^{(1)}$$

$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$

Далее подсчитываем новые невязки:

5). $\delta_j = a_{j1}x_1^{(1)} + a_{j2}x_2^{(0)} + \dots + a_{jn}x_n^{(0)} - b_j \quad j \neq i$

6). выбираем g такой $|\delta_g| = \sup_{j\neq i}|\delta_j|$

7). Находим из ур-я № g $x_2^{(1)}$:

$$a_{g1}x_1^{(1)} + a_{g2}x_2^{(1)} + a_{g3}x_3^{(0)} + \dots + a_{gn}x_n^{(0)} = b_g \Rightarrow x_2^{(1)}$$

и т.д.;

8) .... находятся все $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ для первой итерации

N). Повторяем с пункта 2). вторую итерацию $x_k^{(2)} \leftarrow x_k^{(1)}$ до тех пор, пока не выполним требований точности: а). $\sup|\delta_\ell^{(r)}| \leq \varepsilon$ либо б). $\sup|x_\ell^{(r)} - x_\ell^{(r-1)}| \leq \varepsilon$.

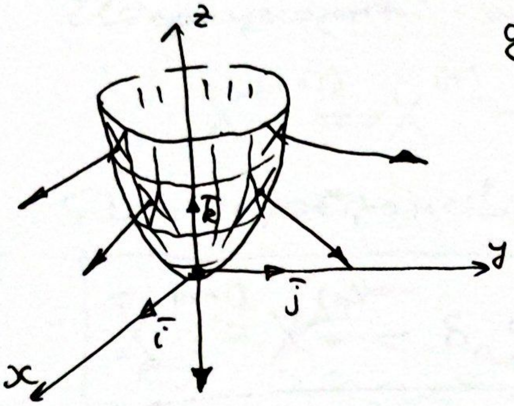
Метод наискорейшего градиентного спуска при решении СЛАУ

(4.2)

Вводные замечания:

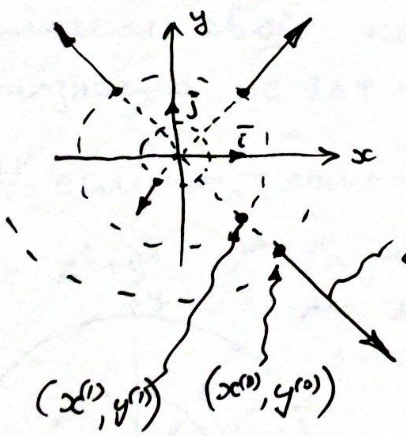
1). $F(x,y,z)=0$ — задает поверхность в R^3:

$F = x^2+y^2-z=0$ — параболоид:



$\text{grad}\, F(x,y,z) = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} - \bar{k}$ — определяет нормаль к поверхности

2). Если $f(x,y) = z = \underbrace{x^2+y^2}_{R^2}$: $\text{grad}\, f = 2x\bar{i} + 2y\bar{j}$



Таким образом $\text{grad}\, f(x,y)$ указывает направление наискорейшего роста $f(x,y)$: двигаясь в направлении от $(x^{(1)}, y^{(1)})$ к $(x^{(0)}, y^{(0)})$ ф-ция $f(x,y)$ растет самым быстрым образом.

Верно также обратное: двигаясь против направления $\text{grad}\, f(x,y)$ мы самым быстрым образом уменьшаем ф-цию $f(x,y)$ $\Rightarrow$ **Приходим в локальный МИНИМУМ**

В самом min $|\text{grad}\, f| = 0$

Т.е. если мы находимся в положении $X^{(0)} = \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix}$, то вычитая из него вектор $\delta_0 \text{grad}\, f(x^{(0)}, y)\Big|_{(x^{(0)}, y^{(0)})}$ мы приблизимся к min и попадем в положение $X^{(1)} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{bmatrix}$

Т.е: $X^{(1)} = X^{(0)} - \delta_0 \text{grad}\, f(x,y)\Big|_0$

Далее, если из положения $X^{(1)}$ двигаться против вектора $\operatorname{grad} f(x,y)\Big|_1$, т.е:

$$X^{(2)} = X^{(1)} - \delta_1 \operatorname{grad} f(x,y)\Big|_1,$$ то окажемся еще ближе к min и т.д.

Т.е:

Итерационный алгоритм минимизации ф-ции $\underbrace{f(x,y)}_{\mathbb{R}^2}$:

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - \delta_n \operatorname{grad} f\Big|_n .$$

Для пространства $\mathbb{R}^N$ все остается в силе:

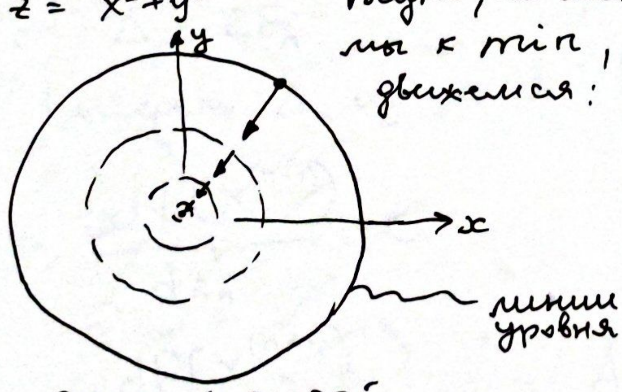
$$\boxed{X^{(n+1)} = X^{(n)} - \delta_n \operatorname{grad} f(x_1, x_2, \dots, x_N)\Big|_n}$$

Отметим, что на каждой итерации №n имеем свой коэффициент δ_n, который пока однозначно НЕ ЗАФИКСИРОВАН — как его брать?

Пр1. если $\delta_n = \mathrm{const} = \delta$

$z = x^2 + y^2$

Видно, что может сработать, но чем ближе мы к min, тем медленнее мы движемся: $|\operatorname{grad} f|\downarrow \longrightarrow 0$.

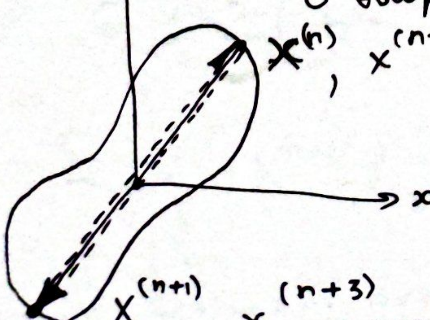


ПРОСТОЙ СЛУЧАЙ

Пр2.

δ выбран так, что произошло зацикливание:

$X^{(n)}, x^{(n+2)}, \dots, x^{(n+k\cdot 2)}\ \forall k$



$X^{(n+1)}, x^{(n+3)}, \dots$

Итак, как выбрать δ_n?

Можно, например, определить δ_n из условия

$$f\left(X^{(n)} - \delta_n \operatorname{grad} f(X^{(n)})\right) \longrightarrow \min_{\delta_n},$$ что

тоже самое, что $$f(X^{(n+1)}) \longrightarrow \min_{\delta_n}.$$

Т.е. выбирается такой δ_n, что f еще быстрее устремляется к min.

Для СЛАУ: $Ax = b$

Если выбрать некоторую ф-цию $F(X)$:

$$F(X) = AX\cdot X - 2(b\cdot X) \quad (*),$$ то

$\operatorname{grad} F = 2(AX - b)$, т.е. когда $F \to \min \Leftrightarrow$ решилась система $AX = b$.

и, следовательно, $|\operatorname{grad} F| = 0 \Leftrightarrow AX - b = 0$

$$\boxed{X^{(n+1)} = X^{(n)} - 2\delta_n(AX^{(n)} - b)} \quad (**)$$

Относительно δ_n:

$\lrcorner$ $\Delta_n = 2\delta_n$

Выберем Δ_n из усл-я $F(X^{(n+1)}) \longrightarrow \min\limits_{\Delta_n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dF(X^{(n+1)})}{d\Delta_n} = 0$$

$$\frac{dF(X^{(n+1)})}{d\Delta_n} = \{(*)\} = \left(A\underbrace{\frac{dX^{(n+1)}}{d\Delta_n}\cdot X^{(n+1)}}\right) + \left(A\underbrace{X^{(n+1)}\cdot\frac{dX^{(n+1)}}{d\Delta_n}}\right) -$$

$$A\left\{\frac{dX}{d\Delta_n}\cdot X + X\cdot\frac{dX}{d\Delta_n}\right\}$$

$$-2\left(b\cdot\frac{dX^{(n+1)}}{d\Delta_n}\right) = 2\left(AX^{(n+1)} - b,\ \frac{dX^{(n+1)}}{d\Delta_n}\right) \overset{(**)}{=}$$

$$= \underbrace{2\left(AX^{(n+1)} - b,\ -(AX^{(n)} - b)\right)}_{\text{скалярн. произв.}} \Rightarrow$$

$$-2\left(AX^{(n+1)}-b,\ AX^{(n)}-b\right)=0$$

(**) $\Rightarrow$ $$\left(A\left[X^{(n)}-\Delta_n\left(AX^{(n)}-b\right)\right]-b,\ AX^{(n)}-b\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Delta_n=\frac{\left(AX^{(n)}-b,\ AX^{(n)}-b\right)}{\left(A\left(AX^{(n)}-b\right),\ AX^{(n)}-b\right)}.$$

Таким образом, каждый шаг делается с собственным δ_n, пока (**) не даст нужной точности.

<u>Относительно способов обращения матриц</u>

$A^{-1}\cdot A = E \qquad \lrcorner\ A^{-1} \overset{df}{=} B$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \emptyset \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & 1 \end{bmatrix}$$

Кол-во неизвестных $n\times n$: b_{ij}

Ур-я:

$$\left.\begin{cases} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}+\dots+a_{n1}b_{1n}=1 \\ a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12}+\dots+a_{n2}b_{1n}=0 \\ \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{12}+\dots+a_{nn}b_{1n}=0 \end{cases}\right\} \rightarrow b_{1j}, \quad j=1..n$$

$\vdots$

...

$\vdots$

$$\left.\begin{cases} a_{11}b_{n1}+a_{21}b_{n2}+\dots+a_{n1}b_{nn}=0 \\ \vdots \\ a_{n1}b_{n1}+a_{n2}b_{n2}+\dots+a_{nn}b_{nn}=1 \end{cases}\right\} b_{nj}, \quad j=1..n$$

Решается n СЛАУ $\Rightarrow$ методы разработаны