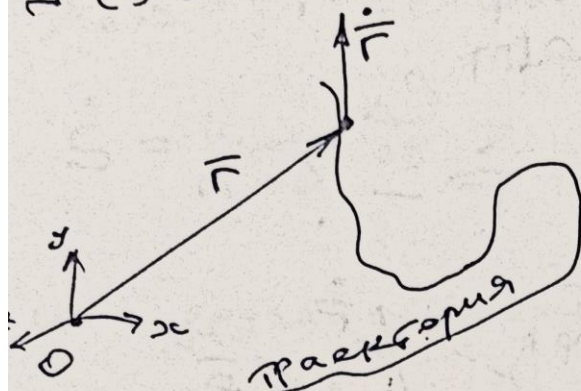


Кинетический момент точки

✓ (1) с массой $m=1$



$$\bar{K} = \bar{r} \times m \dot{\bar{r}}$$

$$m=1$$

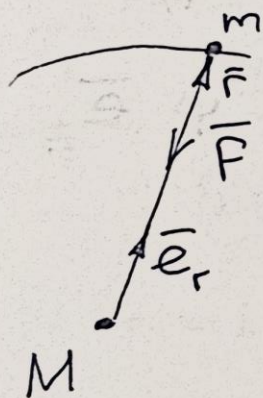
$$\bar{K} = m \bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \bar{r} \times \dot{\bar{r}}$$

Зену равна $\dot{\bar{K}} = ?$

$$\frac{d}{dt} \bar{K} = \frac{d}{dt} (\bar{r} \times \dot{\bar{r}})_m = \underbrace{(\dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}})}_{\uparrow\uparrow} + \bar{r} \times \ddot{\bar{r}}_m =$$

$$= (\bar{r} \times \ddot{\bar{r}})_m$$

Если имеет место центральное поле то



3. Ньютона: $m \ddot{\bar{r}} = \bar{F}$

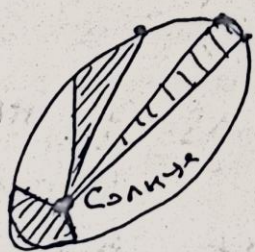
$$\bar{F} = -|F| \bar{e}_r$$

$$\Rightarrow \ddot{\bar{r}} = \frac{-|F|}{m} \bar{e}_r$$

$$\frac{d}{dt} \bar{K} = \bar{r} \times \ddot{\bar{r}}_m = \bar{r} \times (-|F|) \bar{e}_r =$$

$$= |\bar{r}| \bar{e}_r \times (-|F|) \bar{e}_r = -|\bar{r}| |F| (\bar{e}_r \times \bar{e}_r) = 0$$

$\Rightarrow$ Закон Кеплера (второй)

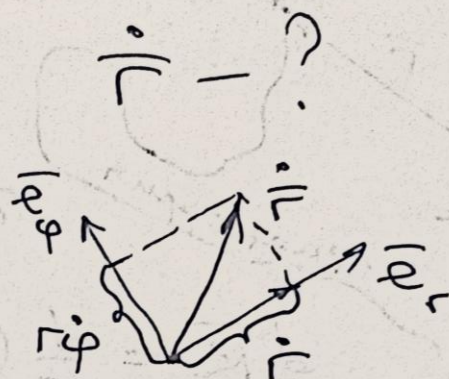
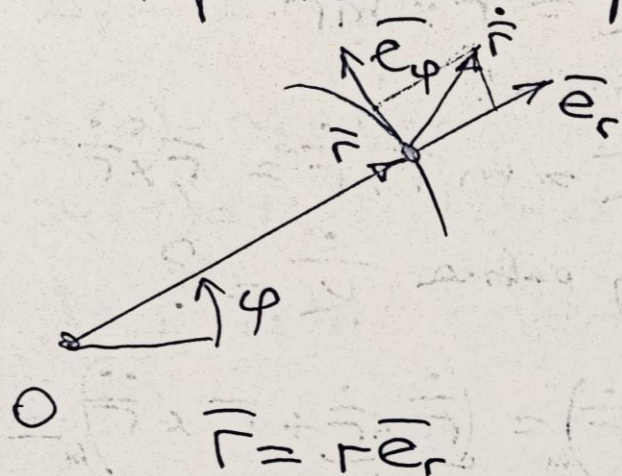


"За равные промежутки времени
радиус-вектор планеты
заметает равные площади"

$$\bar{K} = \text{const}$$

Доказательство закона Кеплера:

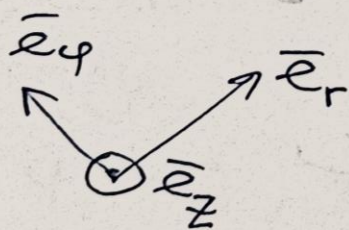
Полярные координаты



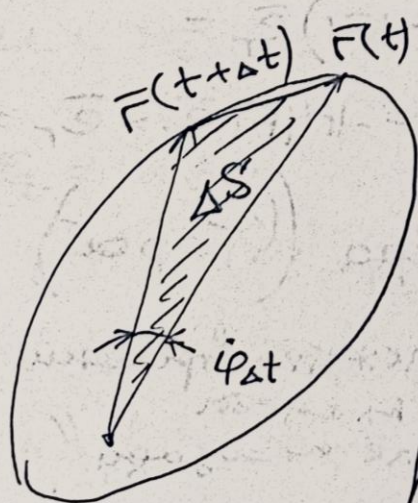
$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \vec{r} \times \dot{\vec{r}} m = r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = \\ &= r \dot{r} \vec{e}_r \times \vec{e}_r + r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\vec{e}_z = \text{const} \Rightarrow$$

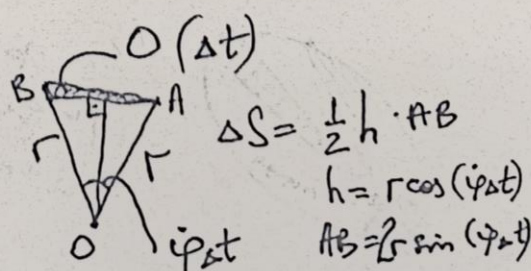


$$\left. \begin{aligned} |\vec{K}| &= \text{const} \\ |\vec{K}| &= r^2 \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$



$$\begin{aligned} \Delta S &= S(t + \Delta t) - S(t) = \\ &= \end{aligned}$$

→ zoom:



$$\Delta S = \frac{1}{2} h \cdot AB$$

$$h = r \cos(\varphi_{\Delta t})$$

$$AB = 2r \sin(\varphi_{\Delta t})$$

$$2 \dot{\varphi} \Delta t \ll 1 \Rightarrow \cos(\dot{\varphi} \Delta t) \approx 1; \sin(\dot{\varphi} \Delta t) = \dot{\varphi} \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{1}{2} r \cdot 2r \cdot \dot{\varphi} \Delta t = r^2 \dot{\varphi} \Delta t$$

$$\dot{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} - \text{это скорость изменения площади}$$

$$u = \text{гравит. скорость} \quad r^2 \dot{\varphi} = |\vec{K}| = \text{const}$$

$\Rightarrow$ закон Кеплера (второй).

11.3. К:

T_1, T_2 - периоды обращения
2х планет

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

a_1, a_2 - большие полуоси
эллипсов орбит 2х планет

Движение в центральном поле

$$m = 1$$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

$U = U(r)$ - потенци. энергия,
зависящая только от $|\vec{r}| = r$

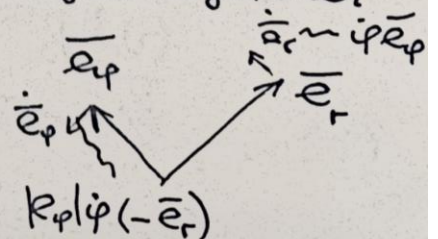
Полярные координаты:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi \quad (\equiv)$$

Векторы $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$ - орты, вращающиеся
с угловой скоростью $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi; \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_r$$



$$\textcircled{=} \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = b \text{ вектор центрального поля} = \\ = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r$$

$\vec{e}_r$:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

$\vec{e}_\varphi$:

$$m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0$$

Также известно, что $K = \text{const} \Rightarrow$

$$m(\dot{\varphi} r^2) = K = \text{const} \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = K/r^2 \Rightarrow$$

$$\left[m \left(\ddot{r} - r \frac{K^2}{r^4} \right) = -\frac{\partial U}{\partial r} \right] \Rightarrow$$

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{K^2}{r^3} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{-K^2}{2r^2} \right) = \\ = -\frac{\partial}{\partial r} \left(U + \frac{K^2}{2r^2} \right) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Т.е. $m \ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$

$V = U + \frac{K^2}{2r^2}$
различный вид

→ энергия для этой ортомерной заряды

$$E_1 = m \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2} + V(r) = \text{const}$$

Потенциал константа и чему равна?

Энергия исходной заряды:

$$E = m \frac{(\dot{\vec{r}})^2}{2} + U(r)$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) =$$

$$= m \frac{\dot{r}^2}{2} + r^2 \frac{K^2}{r^4} + U(r) = m \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r)$$

Т.е. $E_1 = E = \text{обычная}$
полная энергия = const!

⇒

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{(E - V)^2}{m}} = f(r) \Rightarrow \left| \frac{dr}{f(r)} = dt \right|$$

~~и т.д.~~

→ $\dot{\varphi} = \frac{K}{r^2(t)} \rightarrow \varphi = \varphi(t)$

Механика

Механика