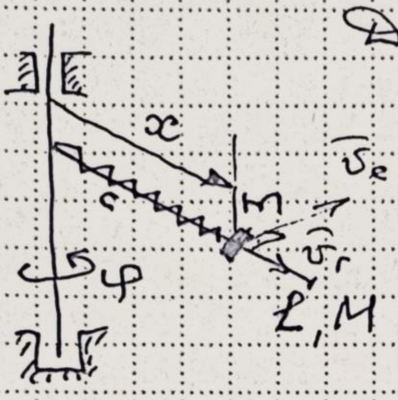
Гамильтоновы уравнения. Пример построения

Дано: ℓ, m, M, c



$$T = T_{стержня} + T_{точки}$$

$$T_{с.} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M\ell^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

$$T_{т} = \frac{1}{2}m\left(v_e^2 + v_r^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\varphi}^2 x^2 + \dot{x}^2\right);$$

$$\Pi = \frac{cx^2}{2}; \quad (x_0 = 0)$$

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{\varphi}^2 x^2 + \dot{x}^2\right) - \frac{cx^2}{2};$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mx^2\dot{\varphi} + J\dot{\varphi} = (mx^2 + J)\dot{\varphi}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\hat{\dot{\varphi}} = \frac{p_\varphi}{mx^2 + J}; \quad \hat{\dot{x}} = p_x / m; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad H = p_\varphi \hat{\dot{\varphi}} + p_x \hat{\dot{x}} - L(x, \varphi, \hat{\dot{\varphi}}, \hat{\dot{x}}) =$$

$$= \frac{p_\varphi^2}{mx^2 + J} + \frac{p_x^2}{m} - \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{p_\varphi^2}{(mx^2+J)^2}x^2 + \frac{p_x^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{J p_\varphi^2}{(mx^2+J)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{cx^2}{2}\right] = p_\varphi^2\left(\frac{1}{mx^2+J} - \frac{mx^2}{2(mx^2+J)^2} - \frac{J}{2(\cdot)^2}\right) + p_x^2\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m}\right) + cx^2/2.$$

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

посвященная памяти Н.Д. Кузнецова

"ПРОБЛЕМ...

$$H = p_\varphi^2 \frac{\left[2(mx^2+J) - mx^2 - J\right]}{2(mx^2+J)^2} + p_x^2 \frac{1}{2m} + \frac{cx^2}{2} =$$

$$= \frac{p_\varphi^2}{2(mx^2+J)} + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{cx^2}{2};$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}; \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}; \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \text{ — ур-я Гамильтона}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{x} = \frac{p_x}{m}; \quad \dot{p}_x = -\left[\frac{-p_\varphi^2\, 2mx}{2(mx^2+J)^2} + cx\right] \\ &\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mx^2+J}; \quad \dot{p}_\varphi = 0 \end{aligned} \right. \quad (\Gamma)$$

А что было для ур-й Лагранжа?:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

Проведем сравнение:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}=J\dot\varphi+mx^2\dot\varphi; \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x}=m\dot x; \qquad \frac{\partial L}{\partial x}=m\dot\varphi^2 x-cx$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}=J\ddot\varphi+2mx\dot x\dot\varphi+mx^2\ddot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x}=m\ddot x$$

$$\begin{cases} 1).\ \ddot\varphi(J+mx^2)+2mx\dot x\dot\varphi=0 \\ 2)\ m\ddot x-m\dot\varphi^2 x+cx=0 \end{cases} \quad (Л)$$

$$(Г)\Longleftrightarrow(Л)\ ?:$$

$$(Г)\Rightarrow \dot p_\varphi=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(p_\varphi)=\frac{d}{dt}(mx^2\dot\varphi+J\dot\varphi)=$$

$$=2mx\dot x\dot\varphi+mx^2\ddot\varphi+J\ddot\varphi=0$$

Т.е. следует ур-е Л: $\boxed{\ddot\varphi(J+mx^2)+2mx\dot x\dot\varphi=0}$

Также можно проверить и ур-е Л. для x.