

Гамильтонова группа

$$L = T - U = T - U$$

простейший случай

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 ; \quad T = T(\dot{x}); \quad U = U(x)$$

1) Введем импульс (p):

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$$

$$; \quad U = U(x)$$

т.е. $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = p(\dot{x})$
не зависит

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

2) Введем ф-цию Гамильтона

$$H = T + U \Rightarrow p = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}$$

т.к. $U = U(x)$

3) Из экв. Лагранжа $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt} (p) = - \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow$$
$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial x}$$

4) Т.о.

$$H = T + U;$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{x}^2$$

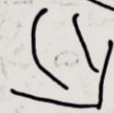
$$T = \text{прост. сл.} = \frac{m \dot{x}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \Downarrow$$

но

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \Rightarrow p = m \dot{x}$$

$$\dot{x} = p/m$$

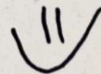


$$\frac{\partial T}{\partial p} = \dot{x}$$

$$T = T(p)$$

$$U = U(x)$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p}$$



$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

простейший случай

простейший случай

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{array} \right.$$

→ ур-я
Гамильтона
следуют из
Лагранжа.

Гамильтонова форма.

Ф-ция Лагранжа была $L = T - P$

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

Был ранее введен принцип наименьшего действия:

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_K} L dt$$

"Движение механической системы совпадает с экстремалью функции на действии Φ " $\Rightarrow \{ m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \}$

1) Теперь введем еще одну ф-цию:

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i - L$$

2) Введем новые переменные p_i :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad - \text{это "импульсы"}$$

3) Тогда $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$

4) Выразим из H q -член L :

$$L = \sum p_i \dot{q}_i - H$$

Тогда действие записывается в виде:

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t_k} (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt$$

и $\Rightarrow$ вариация действия равна:

$$\delta \Phi = \delta \int_{t_0}^{t_k} (-) dt = \int_{t_0}^{t_k} \delta(-) dt \quad \ominus$$

поменяли местами оператор $\int$ и δ

$$\ominus \int_{t_0}^{t_k} \{ \sum \delta p_i \dot{q}_i + \sum p_i \delta \dot{q}_i - \delta H \} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_k} \{ \sum \delta p_i \dot{q}_i + \sum p_i \delta \dot{q}_i - \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \} dt \quad \ominus$$

на концах $t_0, t_k, \delta q = 0$

$$\sum p_i \frac{d}{dt} \delta q_i = \text{по правилу} =$$

$$= \sum p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_k} - \int_{t_0}^{t_k} (\sum \delta q_i \dot{p}_i) dt = - \int_{t_0}^{t_k} (\sum \dot{p}_i \delta q_i) dt$$

$\ominus$ собираем подобные члены $\ominus$

$$\begin{aligned} & \equiv \int_{t_0}^{t_k} \left(\sum \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \sum \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) dt = \\ & = \sum \int_{t_0}^{t_k} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt \end{aligned}$$

$\delta \Phi$ = функция должна быть равна 0
т.к. ищем экстремаль $\Rightarrow$

$$\int_{t_0}^{t_k} [\dots] dt = 0 \quad (*)$$

Вариации δq_i и δp_i НЕ являются независимыми поэтому продолжим преобразование:

т.к. $H(t, q_i, p_i) = \sum p_i \dot{q}_i - L(t, q_i, \dot{q}_i)$, то
формально $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} = \dot{q}_i$

т.е. $\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i} \quad (**)$

$(**) \leadsto (*)$:

$$0 = \int_{t_0}^{t_k} \left[(0) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = \int_{t_0}^{t_k} \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta P = 0, \text{ когда } \int_{t_0}^{t_k} \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt = 0$$

По лемме $\int_{t_0}^{t_k} f(t) h(t) dt = 0 \quad \forall h(t)$

$$\Rightarrow f(t) \equiv 0$$

$\Rightarrow$ при произвольных δq_i имеет

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (***)$$

Сводя итог, запишем две ур-я:

$$\begin{aligned} (***) \Rightarrow \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ (***) \Rightarrow \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{— это ур-я} \\ \text{Гамильтона} \\ \text{"канонические"} \end{array} \right\}$$

$$i = 1 \dots n,$$

число степеней
свободы.