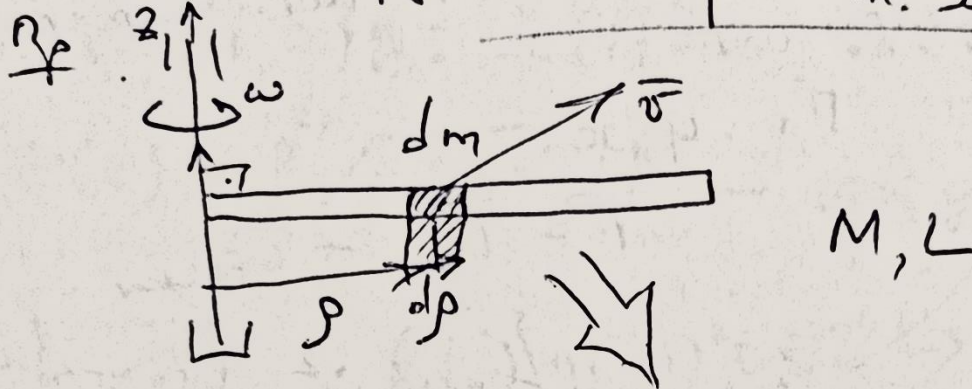


Системы с n ст. свободы

1) Кин. энерг. системы точек; кин. мом.
 $(T) \quad \Sigma T = \Sigma \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (K) = \Sigma K$

2) Кин. эн. твердого тела | кин. мом.



$$\vec{K} = \vec{r} \times m \vec{v}; \quad d\vec{K} = dm \cdot \vec{r} \times \vec{v} = dm \cdot \vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] =$$

$$= dm [\vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})] =$$

$$= dm \vec{\omega} r^2 - r \cdot 0$$

$$d\vec{K} = \vec{\omega} r^2 dm$$

$$dm = \sigma dr$$

$$\sigma = M/L$$

$$\vec{K} = \int_0^L \vec{\omega} r^2 \frac{M}{L} dr = \frac{M}{L} \vec{\omega} \frac{r^3}{3} \Big|_0^L = \frac{M}{L} \vec{\omega} \frac{L^3}{3} =$$

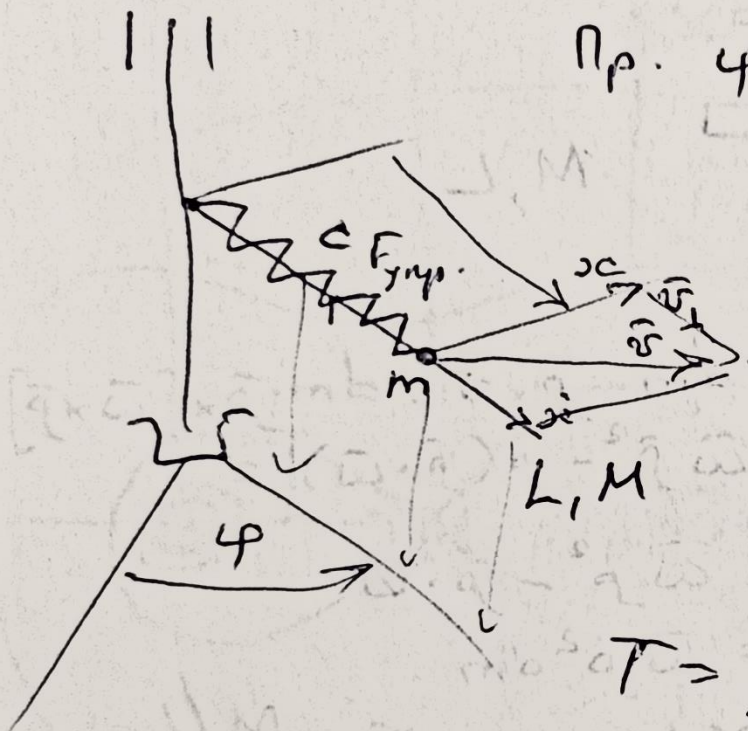
$$= \left(\frac{1}{3} ML^2 \right) \vec{\omega} = J_z \vec{\omega}$$

$$T = \int_M \frac{v^2}{2} = \int_0^L \frac{v^2}{2} \sigma dr = \int_0^L \frac{M}{2L} (r\omega)^2 dr =$$

$$= \omega^2 \frac{M}{2L} \frac{r^3}{3} \Big|_0^L = \omega^2 \frac{M}{2L} \frac{L^3}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{ML^2}{3} \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

$$T = T_{\text{сгм}} + T_{\text{всм}} ; \quad \Pi = - \int_{x_0}^x \underbrace{f(z)}_{\substack{\text{сила, завис.} \\ \text{от положения}}} dz$$

Система с n ст. св. $\rightarrow n$ ин. пар-ров - обобщ. координат.;



$$T = T_{\text{сг.}} + T_{\text{точки}}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} M L^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \left[\frac{1}{2} m (\dot{\varphi} x)^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right]$$

$$v_{\text{ас}}^2 = v_{\perp}^2 + v_{\text{xc}}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} M L^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\varphi}^2 x^2 + \dot{x}^2)$$

$$\Pi = \frac{c x^2}{2} \quad (\text{пружина от нуля}).$$

Лагранжиан: $L = T - \Pi$

Ур-е Л. 2^{го} рода: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

Записи уравнений ...

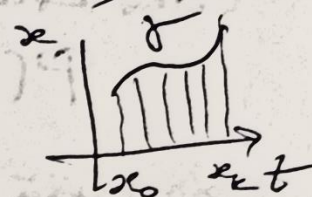
Комментарий о решении.

Д/з: построить
физического
маятника $\rightarrow$ пробола
решить

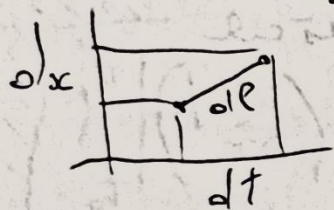
О вариационных методах

Функции от функций (кривых) —
"Функционалы"

$$\Gamma = \{t, x\}_{t_0}^{t_k} : x(t) = x, t_0 \leq t \leq t_k$$



$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_k} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt \quad \text{— это длина кривой.}$$

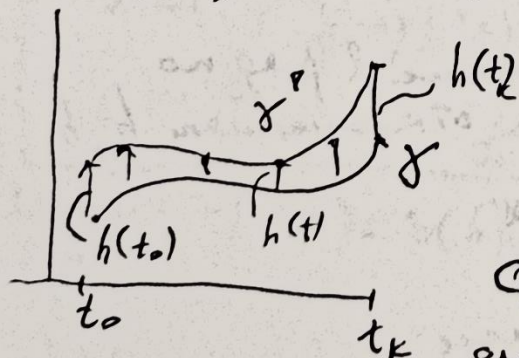


$$(dx)^2 + (dt)^2 = (dl)^2 \Rightarrow dl = \sqrt{(dx)^2 + (dt)^2}$$

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 1} dt = \sqrt{\dot{x}^2 + 1} dt$$

$\Phi(\gamma)$ — функционал: $\gamma \rightarrow \Phi(\gamma)$.

Рассмотрим "близкую" к кривой γ кривую γ' :
 $\gamma' = \{t, x = x(t) + h(t)\}$, т.е. $\gamma' = \gamma + h$



Рассмотрим приращение функционала Φ :

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma).$$

Функционал называется дифференцируемым, если

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F + R, \quad \text{где } F \text{ зависит от } h \text{ линейно,}$$

$$\text{а } R(h, \gamma) = O^2(h).$$

Линейная часть приращения, $F(h)$, $|h| < \varepsilon$
называется дифференциалом,

а также называют вариацией.

h — называют вариацией кривой.

Пр. $\gamma = \{t, x = x(t)\}$

$t, x \rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

Пусть мы имеем функцию трех переменных $L = L(a, b, c)$.

Составим функционал:

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_k} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (1)$$

(одной из крайних точек этого функционала есть длина кривой γ : когда $L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$).

Теорема: Функционал (1) дифференцируемый и его дифференциал дается формулой:

$$\delta(h) = \int_{t_0}^{t_k} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_k}$$

Док-во:

$$\begin{aligned} \delta(h) &= \Phi(\gamma+h) - \Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_k} [L(x+h, \dot{x}+h, t) - L(x, \dot{x}, t)] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_k} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right] dt + O(h^2) = F(h) + R \end{aligned}$$

$$F(h) = \delta(h) = \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt.$$

з/з разложение в ряд по малым отклонениям $h, \dot{h}$

Интегрируем по частям:

$$\int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} dt = \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_0}^{t_k} - \int_{t_0}^{t_k} h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt.$$

Следовательно:

$$F(h) = \delta(h) = \int_{t_0}^{t_k} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] h dt + \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_0}^{t_k}$$

OK

Экстремаль — такая кривая $\bar{\gamma}$, что

$$F(h, \bar{\gamma}) = 0 \text{ при } \forall h.$$

Т.е. для $\bar{\gamma}$ дифференциал функционала $= 0$.

Теорема:

Если кривая $\gamma: x = x(t)$ была экстремалью функционала $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_k} L(x, \dot{x}, t) dt$ на пространстве кривых, проходящих через точки $x(t_0) = x_0$, $x(t_k) = x_k$

необходимо и достаточно, чтобы вдоль кривой $x(t)$ выполнялось равенство:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Лемма: $f(t)$:

$$\left[\begin{array}{l} \text{если } \int_{t_0}^{t_k} f(t) h(t) dt = 0 \text{ для } \forall h(t), \text{ то} \\ f(t) \equiv 0. \end{array} \right]$$

$$\text{Итак, } F(h) = \delta(h) = \int_{t_0}^{t_k} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_k}$$

Т.к. требуется, чтобы кривые проходили всегда через точки $x(t_0) = x_0$ и $x(t_k) = x_k$, то на концах вариация кривой должна быть $= 0$, т.е. $h(t_0) = h(t_k) = 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_k} = 0 \Rightarrow$$

чтобы получить экстремаль нулевой $F(h) = 0$:

$$F(h) = \dots = \int_{t_0}^{t_k} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right] h dt = 0;$$

но по лемме (h — непрерывная $\forall \varphi$ -фр.)

чтобы $F(h) = 0$

$$\Leftrightarrow h \neq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad - \text{каж-ка ур. Э.Л.}$$

где функционал

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_k} L(x, \dot{x}, t) dt$$

из ур-я Ньютона и ур. Э.-Л.
видно, что

$$\text{ур. Н.: } \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Принцип наименьшего действия Лагранжа

действием по Лагранжу наз-я функционал

$$F(r) = \int_{t_0}^{t_k} L dt, \text{ где } L = T - U$$

Кин. энер.

т.е. $F(r) = 0 \Rightarrow$

Движение механ. системы $m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$
совпадают с экстремальми φ -ла действия
Ур-я Ньютона

Док-во:

Т.к. $U = U(\vec{r})$; $T = \sum m_i \frac{\dot{\vec{r}}_i^2}{2}$, то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

т.е.

если $L = T - U$, то из
условия экстремали

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0, \text{ то и}$$

требуется доказать,

Ok