

Системы с 1ой степенью свободы

это система, описываемое одним
гидр. зр-еие:

$$\underline{\ddot{x} = f(x)} \quad (2) \quad x \in \mathbb{R}$$

свободн. коорд.)

Кинетич. энергией наз-ся
квадратичная форма:

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^2$$

Потенц. энерг.: $U(x) = - \int_{x_0}^x f(z) dz$

собственно U
определяет f .

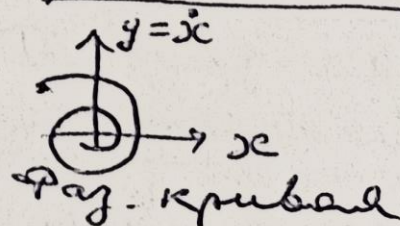
Полная энергия: $E = T + U$.

$\Rightarrow$ Закон сохр. энергии:

E сохраняется и не зависит от t :

$$\nabla \frac{d}{dt} (T + U) = \dot{x} \ddot{x} + \frac{dU}{dx} \dot{x} = \dot{x} (\ddot{x} - f(x)) = 0 \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases} \quad (3) \rightarrow \boxed{\text{Фазовая плоскость}}$$

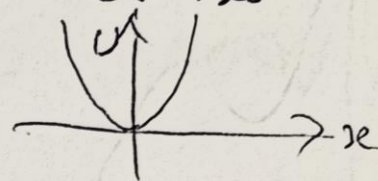


Пр. 1.1 $f(x) = -x \Rightarrow$

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2}; \quad U = -\int_{x_0}^x (-z) dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{x_0}^x =$$

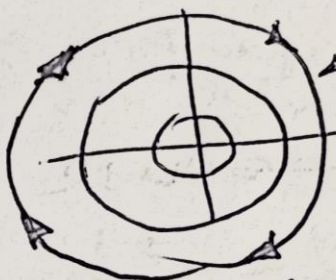
$$= \frac{x^2}{2} - \text{const},$$

$$\Rightarrow E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \text{const.}$$



ФП:

$$\dot{x} = y; \quad E = \frac{y^2 + x^2}{2} = \text{const} \Rightarrow y^2 + x^2 = 2E$$



$$r = \sqrt{2E}$$

Круги.

направление $\odot$ как?

$$\dot{x} = y \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} = -x$$

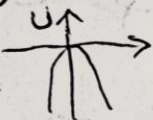
$$\Rightarrow \text{если } x \oplus \Rightarrow y \downarrow$$

$$\text{если } x \ominus \Rightarrow y \uparrow$$

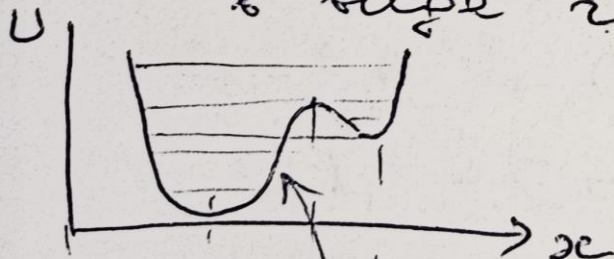
Пр 1.2 $f(x) = x.$

$$\Rightarrow U = -x^2/2$$

$$y^2 - x^2 = 2E$$



Пр 2. $\downarrow$ потенциал энергии задан в виде графика



Как выглядит фаз. плоскость? и энергию?

$$y = \dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x} \end{cases}$$

(рассмотреть как эллипсы-параболы)

$$\frac{y^2}{2} + U(x) = E$$

$$\pm y = \sqrt{2(E - U(x))}$$

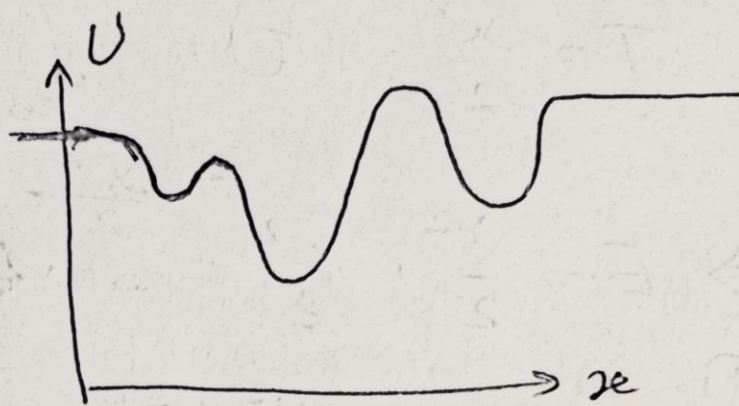
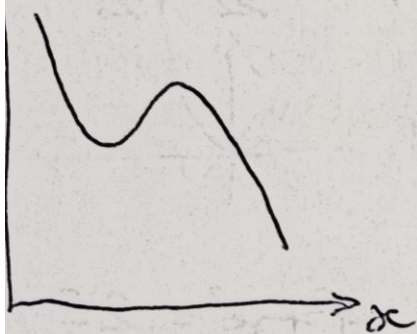
$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{\cdot}} \cdot U'_x$$

~~изоклины~~

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E = \text{const}$$

изоклины

Пр 3.



Ка формуле ждем? ↑ ?

Нужно перебраться на
решение ОДУ

Пр 1.1

В п. 1.1

$$f(x) = -cx \leadsto f(x) = -cx$$

$$\ddot{x} = -cx \Rightarrow \ddot{x} + cx = 0 - \text{ЛОДУ}$$

Поразобачкай Ділера:

р-уни $\zeta_1 e^{\lambda_1 t}$; $\zeta_2 e^{\lambda_2 t}$ — єсть
решення

$\Rightarrow$ єсть єнергована
єсть єдине рішення

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \zeta_1 e^{\lambda_1 t} \\ z_2 &= \zeta_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \right\} \text{єсть } \lambda_{1,2} - \text{корні р-у} \\ \lambda^2 + c\lambda = 0 \\ \lambda^2 = -c \\ \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{c}$$

Как это выразить?

$z_1 \leadsto$ єсть:

$$\zeta_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + \zeta_1 c e^{\lambda_1 t} = 0$$

$$\zeta_1 \lambda_1^2 + \zeta_1 c = 0$$

$$\lambda_1^2 + c = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{c}$$

Проверим:

$$z_1 = \zeta_1 e^{+i\sqrt{c}t} \leadsto$$

$$(+i\sqrt{c})^2 \zeta_1 e^{+i\sqrt{c}t} + \zeta_1 c e^{+i\sqrt{c}t} = 0 - ? \text{ верно?}$$

$$(-1 \cdot c + c) \zeta_1 e^{+i\sqrt{c}t} = 0 \quad \text{Да}$$

z_1 — решение; аналогично z_2 — реш.
 $\Rightarrow$ єдине реш. — єнергована.

Т.о.

$$x(t) = C_1 e^{+i\sqrt{\epsilon}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\epsilon}t}$$

Репрезентация Эйлера:

$\text{Im} z$

(z)

$$\text{Re} z = \rho \cos \varphi$$

$$\text{Im} z = \rho \sin \varphi$$

$$z = \tilde{\rho} \cos \varphi + i \tilde{\rho} \sin \varphi$$

$$z = \tilde{\rho} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

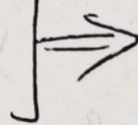
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \left. \vphantom{e^{i\varphi}} \right\} e^{i\varphi}$$

Таким образом Эйлера.

Тогда $e^{\rho + i\varphi} = e^{\rho} e^{i\varphi} = e^{\rho} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$e^{i\sqrt{\epsilon}t} = \cos(\sqrt{\epsilon}t) + i \sin(\sqrt{\epsilon}t)$$

$$e^{-i\sqrt{\epsilon}t} = \cos(-\sqrt{\epsilon}t) + i \sin(-\sqrt{\epsilon}t)$$



$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\epsilon}t + C_1 i \sin \sqrt{\epsilon}t + C_2 \cos \sqrt{\epsilon}t - C_2 i \sin \sqrt{\epsilon}t =$$

~~и т.д.~~

Значит параметры C_1 и $C_2 = ?$

Physik har. gen. & : $x(0) = X_0$

$v = \dot{x}(0) = V_0$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{x}) = -\zeta \sqrt{c} \sin \sqrt{c} t + \zeta_1 i \sqrt{c} \cos \sqrt{c} t - \zeta_2 \sqrt{c} \sin \sqrt{c} t - \zeta_2 i \sqrt{c} \cos \sqrt{c} t$$

$$x(0) = \zeta_1 + \zeta_2 = X_0$$

$$\dot{x}(0) = \zeta_1 i \sqrt{c} - \zeta_2 i \sqrt{c} = V_0$$

$$\zeta_1 = X_0 - \zeta_2 \leadsto$$

$$(X_0 - \zeta_2) i \sqrt{c} - \zeta_2 i \sqrt{c} = V_0$$

$$X_0 - \zeta_2 - \zeta_2 = \frac{V_0}{i \sqrt{c}} \Rightarrow$$

$$-2\zeta_2 = \frac{V_0}{i \sqrt{c}} - X_0$$

$$\zeta_2 = \frac{X_0}{2} - \frac{V_0}{2i \sqrt{c}}$$

$$\zeta_1 = X_0 - \zeta_2 = X_0 - \frac{X_0}{2} + \frac{V_0}{2i \sqrt{c}} =$$

$$= \frac{X_0}{2} + \frac{V_0}{2i \sqrt{c}}$$

$$x(t) = \left(\frac{X_0}{2} + \frac{V_0}{2i \sqrt{c}} \right) \cos \sqrt{c} t + \left(\frac{X_0}{2} + \frac{V_0}{2i \sqrt{c}} \right) i \sin \sqrt{c} t + \left(\frac{X_0}{2} - \frac{V_0}{2i \sqrt{c}} \right) \cos \sqrt{c} t - \left(\frac{X_0}{2} - \frac{V_0}{2i \sqrt{c}} \right) i \sin \sqrt{c} t \Rightarrow$$

$$x(t) = X_0 \cos \sqrt{c}t + \cancel{\frac{V_0}{2i\sqrt{c}} e^{i\sqrt{c}t}} +$$

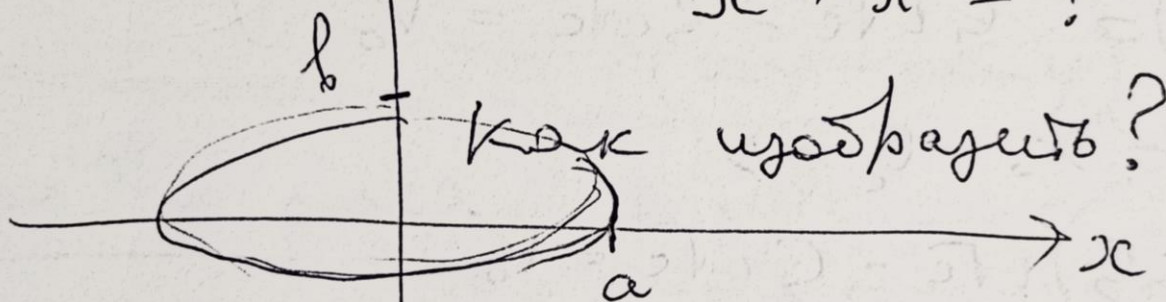
$$+ \frac{V_0}{2i\sqrt{c}} 2i \sin \sqrt{c}t =$$

$$= X_0 \cos \sqrt{c}t + \frac{V_0}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c}t$$

$$\dot{x}(t) = -X_0 \sqrt{c} \sin \sqrt{c}t + V_0 \sin \sqrt{c}t$$

Ok.

$$x^2 + \dot{x}^2 = ?$$



Перепишем ген. ур-на :

$$x(t) = A(\sin \alpha \cos \sqrt{c}t + \cos \alpha \sin \sqrt{c}t) \Leftrightarrow$$

$$\text{где } \sin \alpha = \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + V_0^2/c}}$$

$$\Leftrightarrow A \sin(\alpha + \sqrt{c}t) = \sqrt{X_0^2 + V_0^2/c} \sin(\sqrt{c}t + \alpha)$$

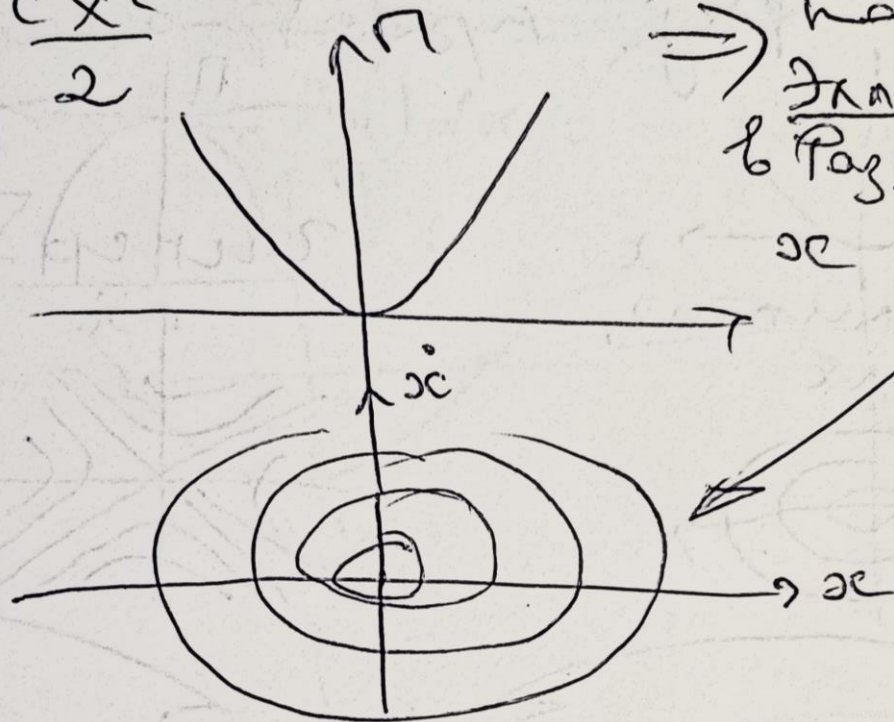
$$\dot{x} = \sqrt{\cdot} \cos(\sqrt{c}t + \alpha) \sqrt{c} = \sqrt{X_0^2 c + V_0^2} \cos(\sqrt{c}t + \alpha)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{X_0^2 + V_0^2/c}} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{X_0^2 c + V_0^2}} \right)^2 = 1 \quad \text{— это и есть} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{b^2} = 1$$

Т.о. $\dot{x}$ имеет постоянную
 знак $\ddot{x} = -cx$ $f(x)$

$$H = \frac{cx^2}{2}$$

$$-\int_0^x f(x) dx$$



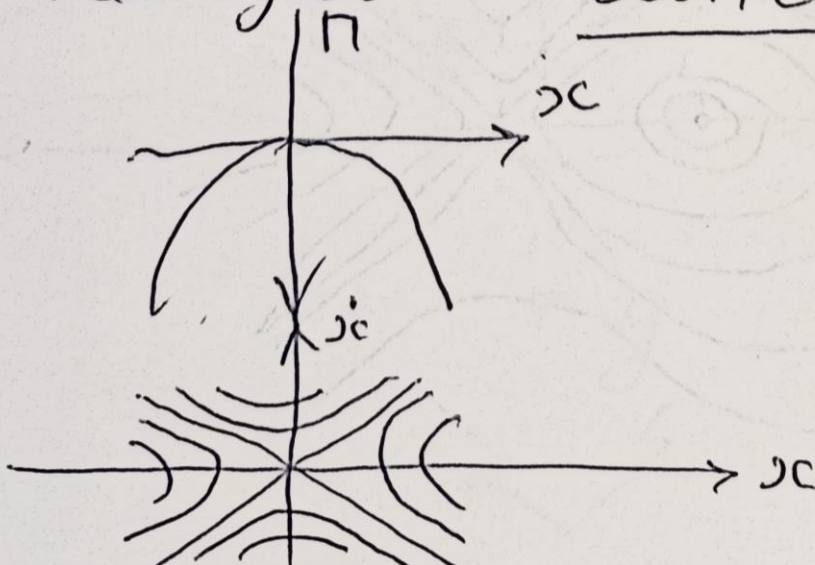
$\Rightarrow$ движение
 в равновесии

Если так же отображать
 рассматривать $f(x) = kx$

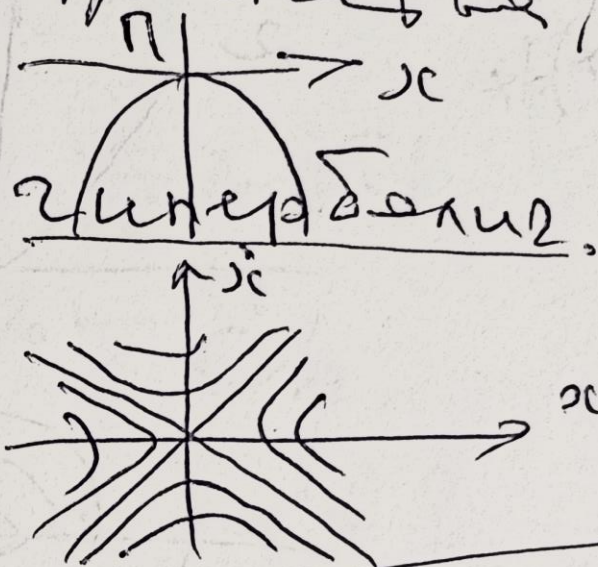
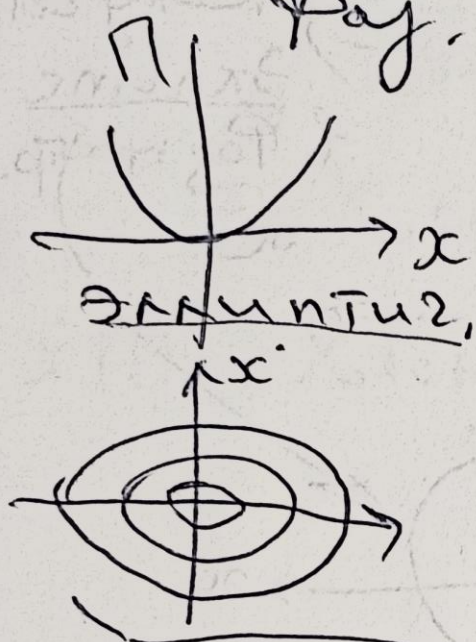
т.е. $\ddot{x} = kx$

$$H = -\frac{kx^2}{2} = -\int_0^x (kx) dx, \text{ то } \Rightarrow$$

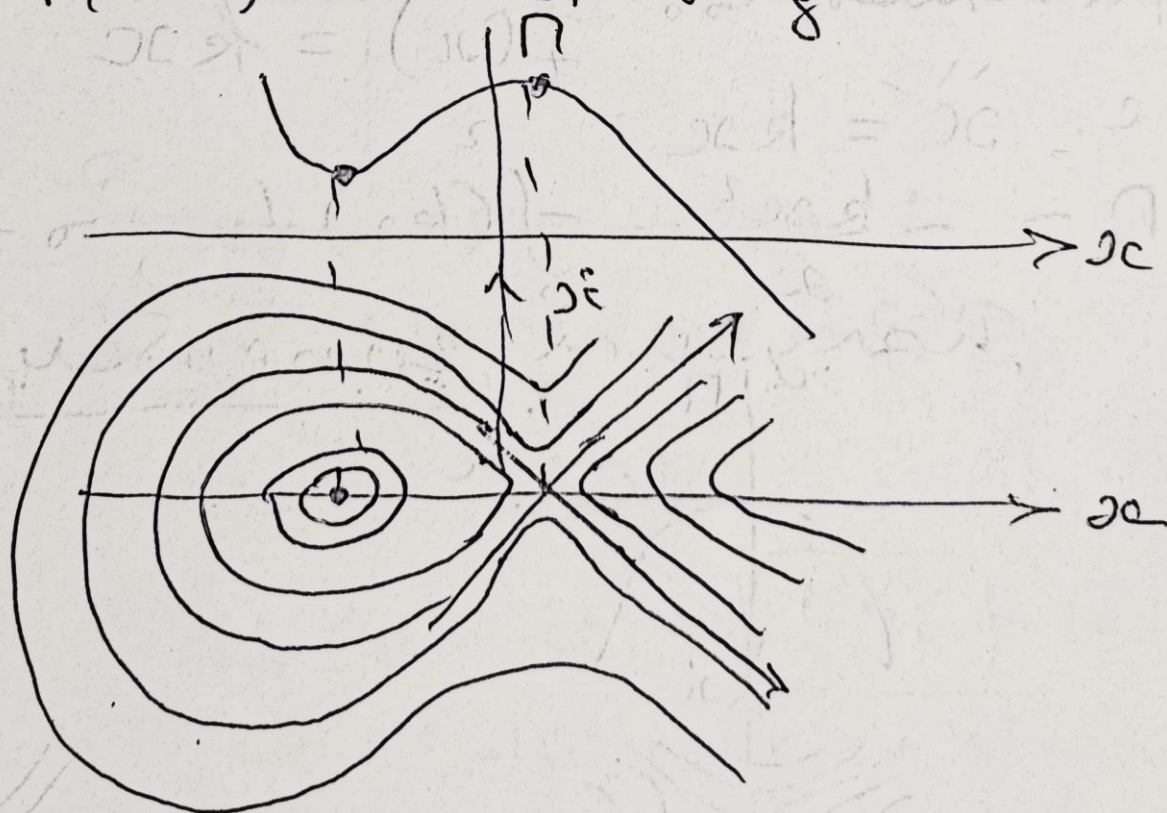
движение гиперболой:



Т.о. графиком потенциальной
энергетического графика
физ. пространства;



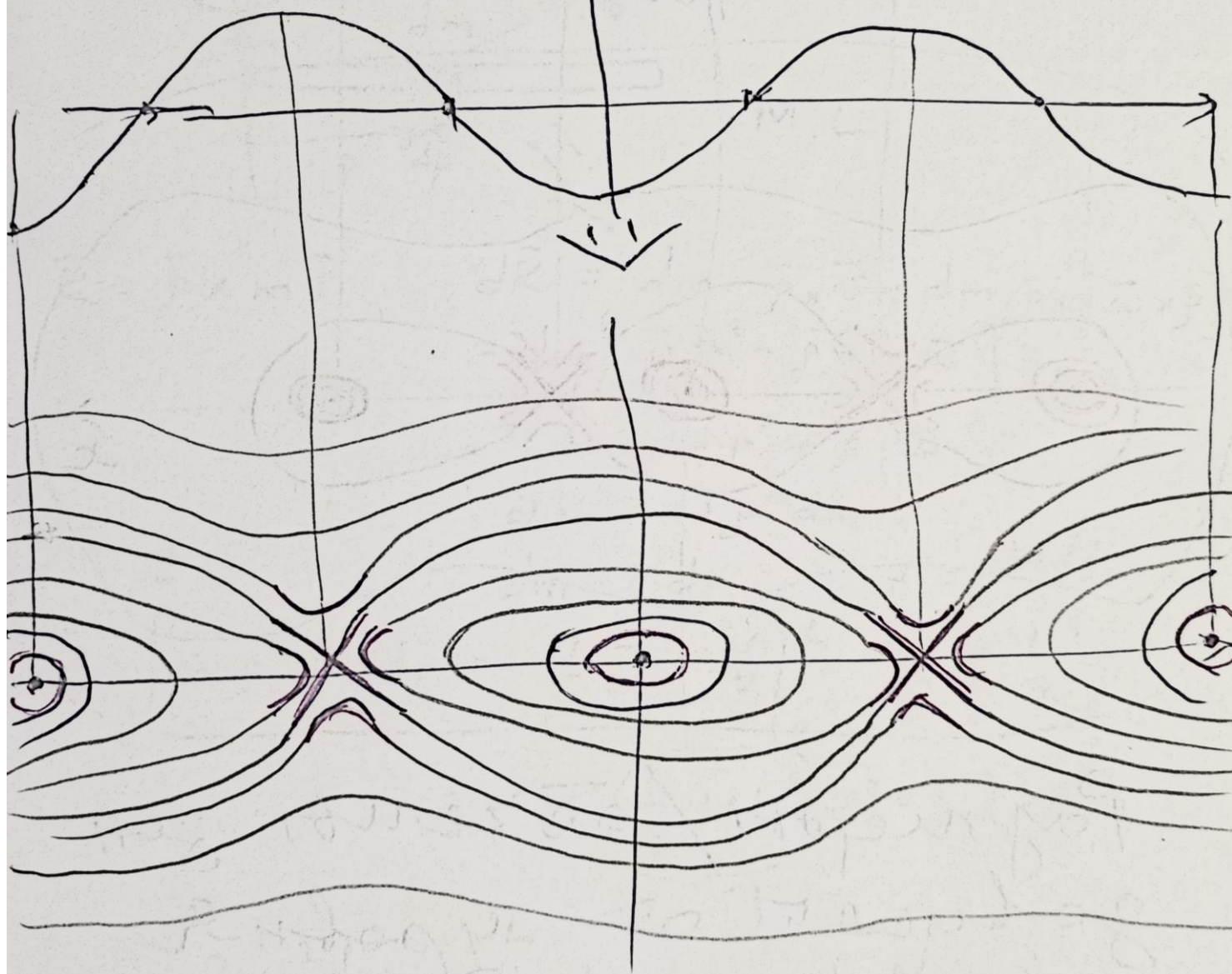
↓ $\Pi(x)$ имеет вид



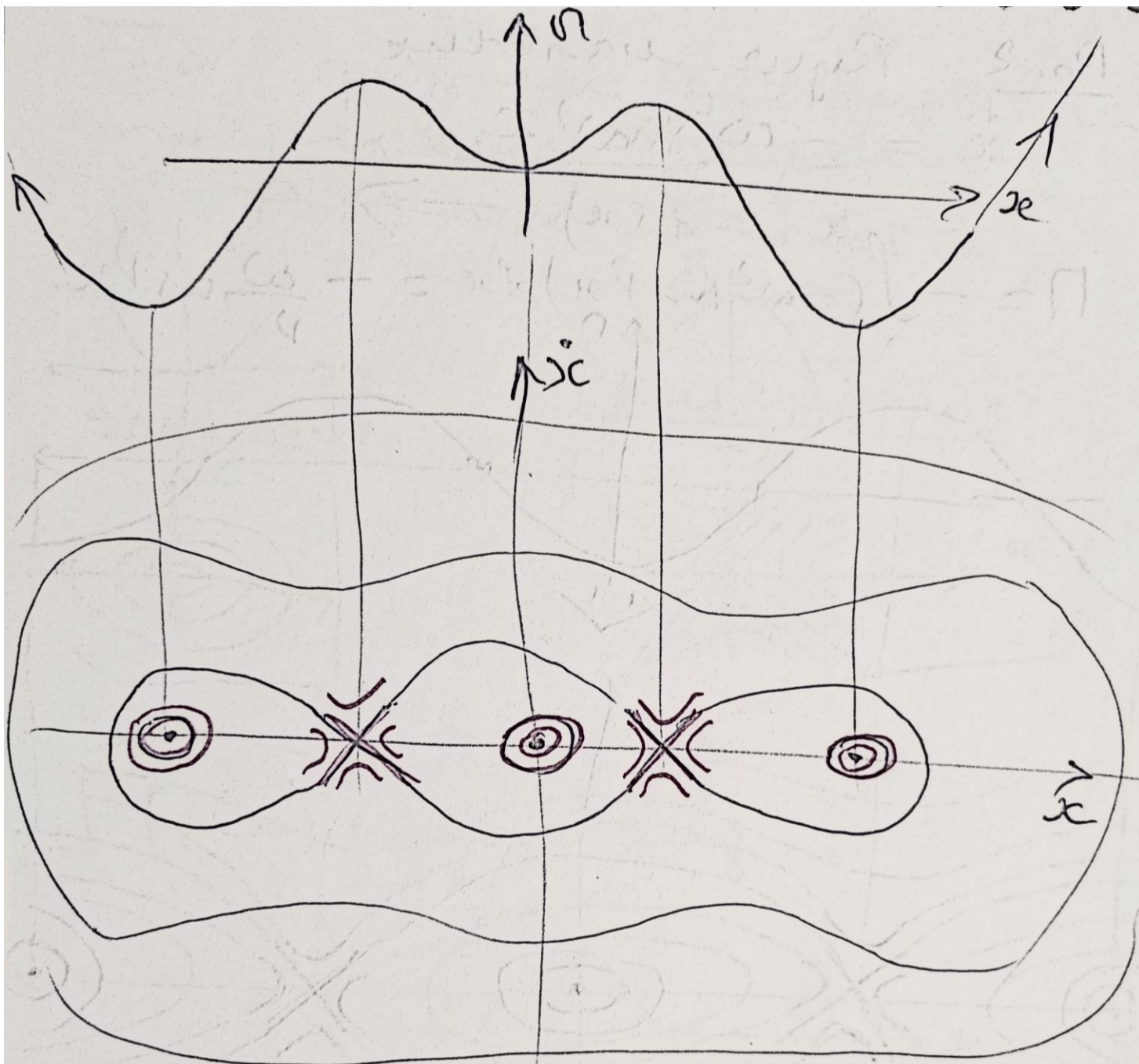
Пр. 2. Ригур. математик;

$$\ddot{x} = - \underbrace{\omega^2 \sin \nu x}_{f(x)}$$

$$H = - \int_0^x f(x) dx \Rightarrow H = - \int_0^x (-\omega^2 \sin \nu x) dx = - \frac{\omega^2}{\nu} \cos \nu x$$



и т.д.



Размеры / объемы зон
зависят от уровня
энергии $\Pi(x)$.