Модели и методы современной механики

МАГИСТРАТУРА

Уравнение Ньютона!

Согласно принципу детерминизма Ньютона всё движение системы <u>однозначно</u> определяется её начальными положением $\bar{x}(t_0)\in\mathbb{R}^N$ и начальными скоростями $\dot{\bar{x}}(t_0)\in\mathbb{R}^N$

Т.е. всё, включая <u>ускорения</u>, опред-ся положением, скоростью и временем:

$$\ddot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)$$ — уравнение Ньютона

$$F: \underset{x}{\mathbb{R}^N}\times\underset{\dot{x}}{\mathbb{R}^N}\times\underset{t}{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^N$$

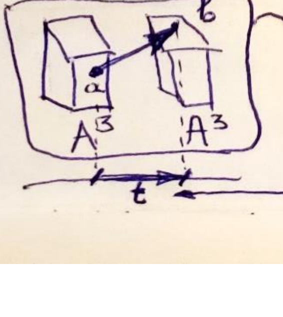
Вид функции F для каждой конкретной механической системы определяется <u>ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО</u>

⟹ Что есть мир? : <u>Галилеева структура</u>

▶ <u>Мир</u> - это 4^x мерное аффинное пространство A^4. Точки A^4 называют мировыми точками или событиями

Аффинное пространство A^n отличается от $\mathbb{R}^n$ тем, что в A^n не фиксировано начало координат.

▶ <u>Время</u>: время - это отображение $t:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$



~ A^4

$a\in A^4$; $b\in A^4$

число $t(b-a)$ - называют промежутком времени

Если $t(b-a)=0 \Rightarrow$ a и b – это одновременные события.

▶ Расстояния $\rho(a,b)$ между одновременными событиями определяется введенной метрикой/нормой.

Если $\rho(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{(a-b)\cdot(a-b)}$

$\{a,b\} \in A^3$

то это превращает каждое пространство одновременных событий в трехмерное евклидово пространство E^3.

т.е. задано скалярное произведение

Галилеева структура – это три элемента: мир, время, расстояние

Галилеевым пространством называют $\underline{A}^4$, снабженное галилеевой структурой

Галилеевой группой наз-ся группа всех преобразований галилеева пространства, сохраняющих его структуру.

Элементы этой $\mathbf{I}$ группы наз-ся галилеевыми преобразованиями

Напоминание. Отображение $\varphi\colon X \to Y$ из множества X в множество Y называется *взаимно однозначным* (или *биекцией*), если для каждого элемента $y \in Y$ существует ровно один элемент x такой, что $\varphi(x) = y$.

Преобразование ψ называется *тождественным*, если для каждого $x \in X$ выполнено равенство $\psi(x) = x$. Обозначение: $\psi = \mathrm{id}_X$.

Отображение $\varphi\colon X \to Y$ называется *обратным* для отображения $\psi\colon Y \to X$, если справедливы равенства $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$ и $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$. Обозначение: $\varphi = \psi^{-1}$

Количество элементов во множестве X обозначается через $|X|$ или $\#X$.

Определение 1. *Преобразованием* множества X называется любая биекция $\varphi\colon X \to X$. Для множества всех преобразований X зарезервировано обозначение $S(X)$.

Определение 2. *Группой преобразований* множества X называется всякая непустая совокупность его преобразований G, удовлетворяющая следующим свойствам:

(i) G замкнута относительно композиции, то есть для всех $g, h \in G$ верно: $g \circ h \in G$;

(ii) G замкнута относительно взятия обратного преобразования, то есть для всех $g \in G$ преобразование g^{-1} лежит в G.

Еще определения (альтернативно):

Определение (1). Обозначим *G(A)* множество биекций *f: A→A*. **Назовем подмножество *H*∈*G(A)* *группой***, если выполнены 3 условия: **а)** $Id_A \in H$; **б)** если $f \in H$, то и $f^{-1} \in H$; **в)** если $f,g \in H$, то и $f \circ g \in H$.

Число элементов или мощность *H* называются *порядком группы*.

Определение (2). Если $H \subset G(A)$, то говорят, что задано *действие группы H на множестве A.* ***Орбита H(a)*** элемента $a \in A$ – это множество всех тех элементов, в которые переходит *a* под действием преобразований из *H*. *Порядок орбиты* – это число элементов (или мощность) орбиты.

Определение (3). ***Подгруппа*** – это подмножество группы, являющееся группой.

Примеры галилеевых преобразований ТРИ:

1) Равномерное движение со скоростью $\bar{v}$:

$$g_1(t, \bar{x}) = (t, \bar{x} + \bar{v}t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \bar{x} \in \mathbb{R}^3$$

2). Сдвиг начала отсчета:

$$g_2(t, \bar{x}) = (t + s, \bar{x} + \bar{S})$$

3). Поворот осей координат:

$$g_3(t, \bar{x}) = (t, G\bar{x}),$$ где $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ есть ортогональное преобразование

Возвращаясь к ур-ю Ньютона

$$\ddot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) \quad (1)$$

Т.к. в принципе относит. Галилея (инерциальные с.к.) законы природы не меняются с изм. с.к.

т.е. при галилеевых преобр., то

если мы выполним $g_2(t, \bar{x}) = (t + s, \bar{x}) \Rightarrow$ в (1) не должно в F стоять t.

изменятся лишь нач. условия

Системы с 1^ой степенью свободы

— это системы, описываемые одним диф. ур-ем:

$$\ddot{x} = f(x) \quad (2) \qquad x \in \mathbb{R}$$

(обобщ. коорд.)

Кинетич. энергией наз-ся квадратичная форма:

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

Потенц. энерг.: $U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$

собственно U определяет f.

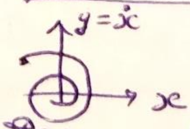
Полная энергия: $E = T + U$.

$\Rightarrow$ Закон сохр. энергии:

E сохраняется и не зависит от t:

$\triangledown$ $\frac{d}{dt}(T+U) = \dot{x}\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\dot{x} = \dot{x}\underbrace{(\ddot{x} - f(x))}_{(2)} = 0$ $\blacktriangle$

$$(2) \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases} \quad (3) \longrightarrow \boxed{\text{Фазовая плоскость}}$$



Фаз. кривая