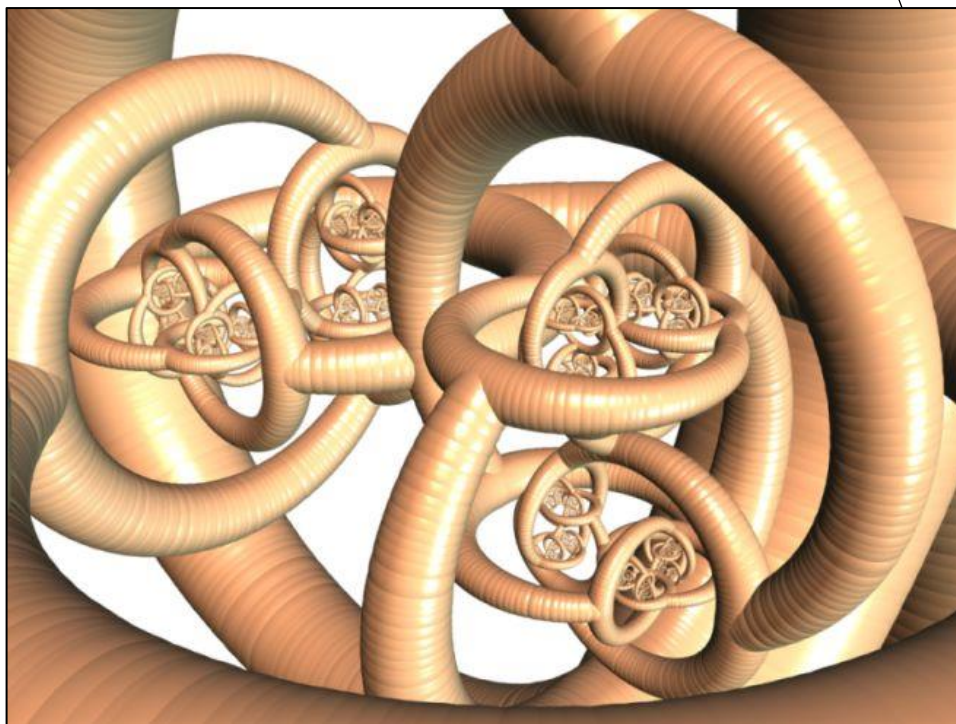
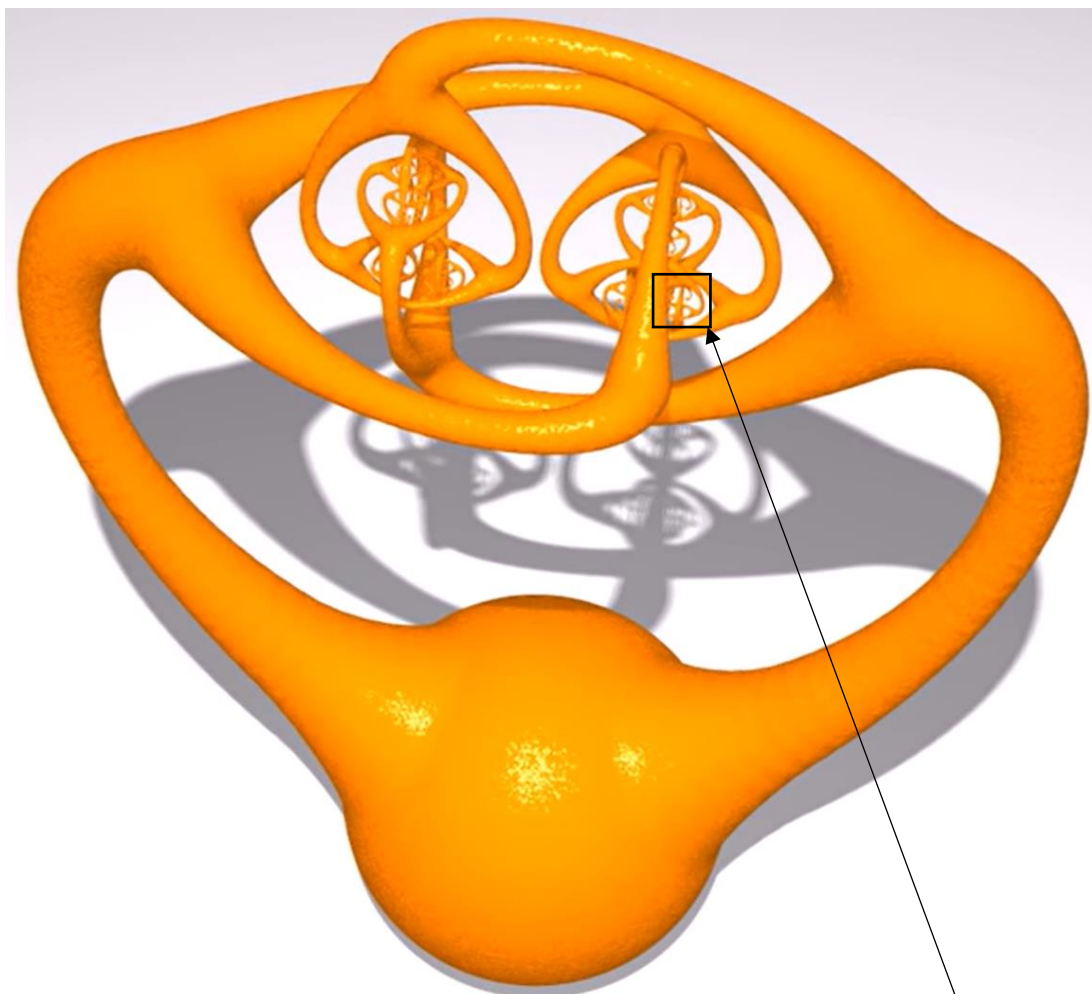


Дикая сфера (Джеймс Александер)



Рисунки взяты из открытых источников

На основе концепта «Дикая сфера» можно предложить одномерный аналог «**Дикое кольцо**», когда все элементы построения рассматриваются как дуги (одномерные линии).

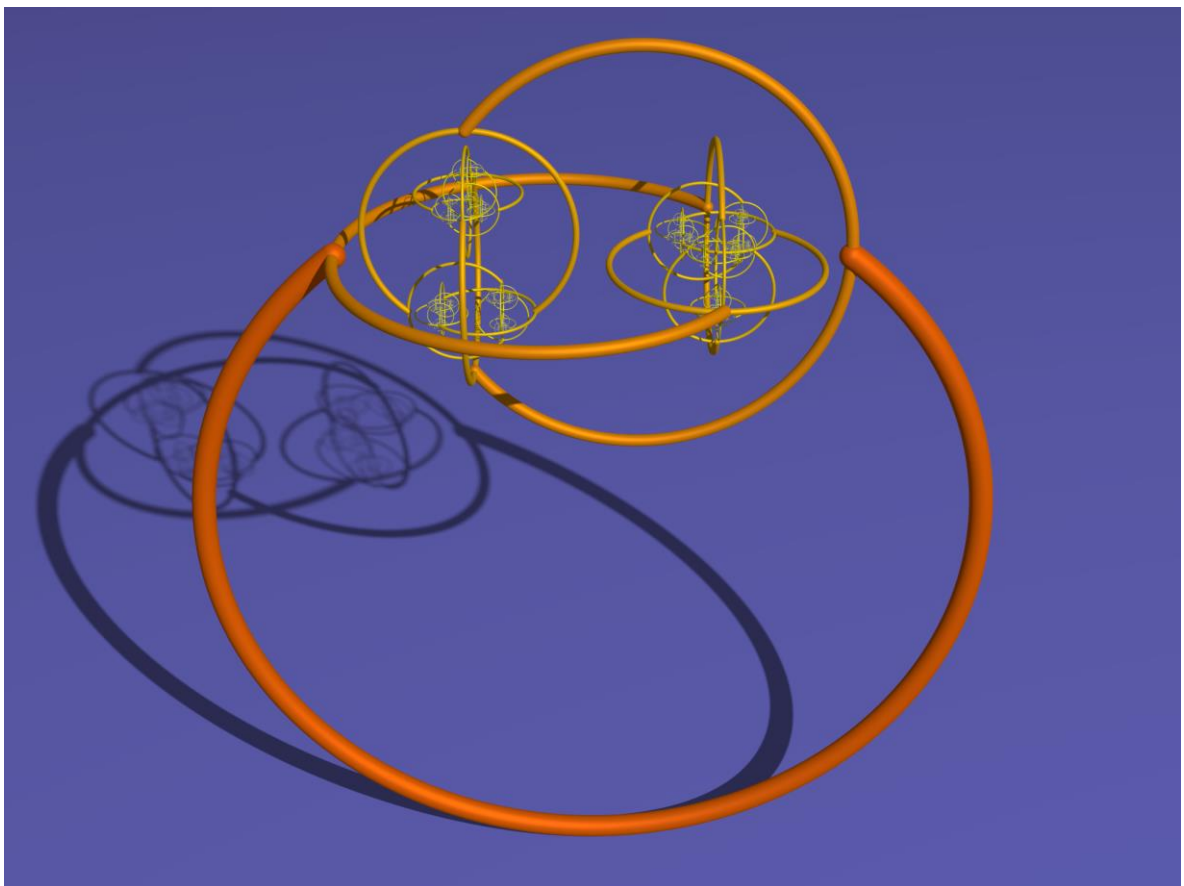
Алгоритм построения «Дикого кольца»:

0). Берется отрезок стартовой длины и сворачивается в окружность. Получаем окружность с длиной L_0 и диаметром D_0 . Далее концы немного размыкаются и образуют щель размера $h_0 = D_0 \cdot \varepsilon$ (где $\varepsilon < 1$). В итоге образуется исходная дуга ($L_0 = \pi D_0$).

1). На концы исходной дуги во внутренности щели насаживаются в ортогональных плоскостях две дуги поколения №1, образованные аналогично исходной дуге (поколения №0) из колец с диаметром $D_1 = h_0 \cdot \varepsilon$ (гарантировано помещаются в щель стартового поколения) и длинами $L_1 = \pi \cdot D_1$, со щелями $h_1 = D_1 \cdot \varepsilon$.

2). Алгоритм повторяется бесконечно с насаживанием пар дуг на концы каждой предыдущей дуги (с номером поколения $i-1$) со следующими параметрами колец и щелей поколения № i : $L_i = \pi \cdot D_i$, $D_i = h_{i-1} \cdot \varepsilon$, $h_i = D_i \cdot \varepsilon$.

Дикое кольцо



Это фрактал или что? Вычислим фрактальную размерность:

"дикое кольцо"



а). Кольцо согнуто из пластины L_0 с радиусом D_0
 $N=0$: $L_0 = \pi D_0$; далее образована (разжата) цепь
 $h_0 = D_0 \cdot \varepsilon$; $\varepsilon \ll 1$

б). На концы исходного кольца в цепь накладываются свои
 $N=1$: два кольца: $D_1 = h_0 \cdot \varepsilon$ — радиус кольца; $L_1 = \pi D_1$
 и разжимаются цепи: $h_1 = D_1 \cdot \varepsilon = h_0 \varepsilon^2$; $D_1 = D_0 \varepsilon^2$

Именно тогда: 2 маленьких кольца и одно исходное
 для их покрытия отрезками пластины L_1 нужно: M_1 штук

$$M_1 = \frac{2L_1}{L_1} + \frac{L_0}{L_1} = 2^1 + \frac{\pi D_0}{\pi D_1} = 2^1 + \frac{D_0}{h_0 \varepsilon} = 2^1 + \frac{D_0}{D_0 \varepsilon^2}$$

2). + 4 кольца: $D_2 = h_1 \varepsilon = h_0 \varepsilon^3 = D_0 \varepsilon^4$; $L_2 = \pi D_2$
 $h_2 = D_2 \varepsilon$

$$M_2 = \frac{4L_2}{L_2} + \frac{2L_1}{L_2} + \frac{L_0}{L_2} = 2^2 + 2 \cdot \frac{\pi D_1}{\pi D_2} + \frac{\pi D_0}{\pi D_2} =$$

$$= 2^2 + 2^1 \frac{\pi D_1}{\pi h_1 \varepsilon} + \frac{D_0}{D_0 \varepsilon^4} = 2^2 + 2^1 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4}; \quad L_2 = \pi D_0 \varepsilon^4$$

3). + 8 колец: $D_3 = h_2 \varepsilon = D_2 \varepsilon \cdot \varepsilon = D_0 \varepsilon^4 \cdot \varepsilon^2 = D_0 \varepsilon^6$
 $h_3 = D_3 \varepsilon = D_0 \varepsilon^7$; $L_3 = \pi D_3 = \pi D_0 \varepsilon^6$

$$M_3 = \frac{8L_3}{L_3} + \frac{4L_2}{L_3} + \frac{2L_1}{L_3} + \frac{L_0}{L_3} = 2^3 + 2^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} + 2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^4} + \frac{1}{\varepsilon^6}$$

4). + 16 колец; $L_4, D_4, h_4 \dots$

$$M_4 = 16 \frac{L_4}{L_4} + \frac{8L_3}{L_4} + \frac{4L_2}{L_4} + \frac{2L_1}{L_4} + \frac{L_0}{L_4} =$$

$$= 2^4 + 2^3 \frac{1}{\varepsilon^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^4} + 2^1 \cdot \frac{1}{\varepsilon^6} + \frac{1}{\varepsilon^8}$$

...

i). + 2^i колец; L_i, D_i, h_i

$$M_i = 2^i + 2^{i-1} \frac{1}{\varepsilon^2} + 2^{i-2} \frac{1}{\varepsilon^4} + 2^{i-3} \frac{1}{\varepsilon^6} + 2^{i-4} \frac{1}{\varepsilon^8} + \dots + 2^{i-i} \frac{1}{\varepsilon^{2i}}$$

$$M_i = \sum_{s=0}^i 2^{i-s} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{2s}}$$

i	L_i	h_i	D_i	
0	πD_0	$D_0 \varepsilon$	D_0	одно кольцо исходное
1	$\pi D_0 \varepsilon^2$	$D_0 \varepsilon^3$	$D_1 = h_0 \varepsilon = D_0 \varepsilon^2$	+2 кольца
2	$\pi D_0 \varepsilon^4$	$D_0 \varepsilon^5$	$D_2 = h_1 \varepsilon = D_0 \varepsilon^4$	+4 кольца к исходному
3	$\pi D_0 \varepsilon^6$	$D_0 \varepsilon^7$	$D_3 = h_2 \varepsilon = D_0 \varepsilon^6$	+2 ³ кольца к исходному
4	$\pi D_0 \varepsilon^8$	$D_0 \varepsilon^9$	$D_4 = D_0 \varepsilon^8$	+2 ⁴ —
5	$\pi D_0 \varepsilon^{10}$	$D_0 \varepsilon^{11}$	$D_5 = D_0 \varepsilon^{10}$	+2 ⁵ —
6	$\pi D_0 \varepsilon^{12}$	$D_0 \varepsilon^{13}$	$D_6 = D_0 \varepsilon^{12}$	+2 ⁶ —
...				
i	$\pi D_0 \varepsilon^{2i}$	$D_0 \varepsilon^{2i+1}$	$D_i = D_0 \varepsilon^{2i}$	

M_i — число отрезков L_i во всей структуре

$$M_i = \sum_{s=0}^i \left(2^{i-s} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{2s}} \right)$$

$$L_i = L_i = \pi D_0 \varepsilon^{2i}$$

Пусть $D_0 = \frac{1}{4}$

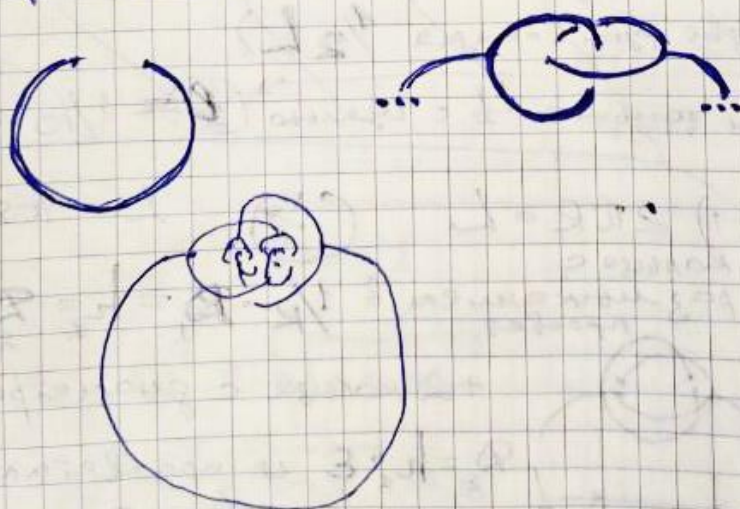
$$= 1$$

$$D_{\text{fractal}} = - \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln M_i}{\ln L_i}$$

Из Maple вычисления:

$$\varepsilon \in (0; 0.4) : D_{\text{fractal}} = 1.$$

при $i = 10^7$.



Дикое кольцо. Фрактальная размерность.

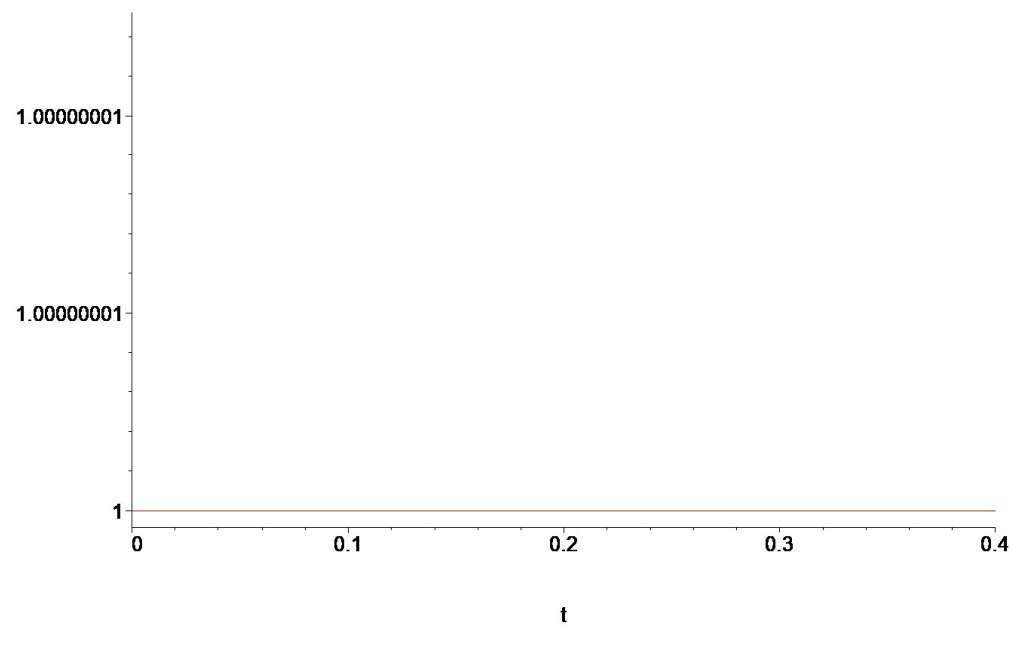
Дорошин А.В., 31.10.24

```

>
> restart;
>
> epsilon:=0.05;
                                     ε := 0.05
> i:=10^7;
                                     i := 10000000
[ пример сумматора:
> sum(k^2,k=0..i);
                                     333333383333335000000
[ Формула итоговая - вычисление фрактальной размерности по определению:
> DDD_i:=eps->-(ln(sum(2^(i-s)/(eps^(2*s)),s=0..i)))/(ln(eps^(2*i)
)) ;
                                     
$$DDD_i := eps \rightarrow - \frac{\ln \left( \sum_{s=0}^i \frac{2^{(i-s)}}{eps^{(2s)}} \right)}{\ln(eps^{(2i)})}$$

> DDD_i(0.1);
                                     1.000000000
> plot(DDD_i(t),t=0..0.4);

```



Зависимость фрактальной размерности от размера щели (от эпсилон)

Т.е. фрактальная размерность равна единице,

а значит это **нормальный объект**.

```
-----  
Для демонстрации накопления погрешности:  
пусть наша бесконечность теперь всего 1000 повторов: i=1000
```

```
> i:=10^3;  
  
i := 1000  
> DDD_i(0.1);  
  
1.000004387  
> plot(DDD_i(t), t=0..0.4);
```

