

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)**

Институт ракетно-космической техники

Кафедра космического машиностроения

ЭЛЕКТРОННОЕ УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Прикладные вопросы динамики твердого тела

Дорошин А.В.

Самара, СГАУ 2015

I. Аналитические решения для параметров движения

твердого тела и соосных тел в случаях,

близких к случаям Эйлера и Лагранжа

(Материал главы базируется на статье: A.V. Doroshin, Exact Solutions in Attitude Dynamics of a Magnetic Dual-Spin Spacecraft and a Generalization of the Lagrange Top, WSEAS Transactions on Systems, Issue 10, Volume 12 (2013) 471-482)

Настоящая глава пособия содержит результаты исследований динамики движения намагниченного КА в геомагнитном поле при реализации орбитального движения центра масс по круговой экваториальной орбите. Находятся точные решения для параметров движения твердого тела (КА) в эллиптических функциях Якоби. Рассматриваемый случай движения может быть охарактеризован как некое обобщение случая движения Лагранжа, т.к. намагниченный КА движется под действием внешнего восстанавливающего/опрокидывающего момента сил.

Также этот материал может быть приведен к результатам, соответствующим случаю Эйлера движения твердого тела, что можно охарактеризовать как соответствующее обобщение случая.

1 Основные положения

Изучение различных аспектов динамики движения твердых тел и космических аппаратов, включая КА с маховиками и спутники-гиростаты, остается важной проблемой современной динамики космического [1-6]. Регулярное и хаотическое движение КА, а также управление этими режимами рассмотрено в многочисленных работах разных авторов, например, в [7-39]. Важные результаты исследований движения твердых тел и гиростатов также приводятся в [1-7], а в [8, 9] изучено свободное движение гиростатов.

Анализ углового (пространственного) движения соосных тел или, что то же самое, КА с двойным вращением (КА с массивным маховиком) проведены в работах [10-20], включая возмущенные случаи движения. В [16-19] рассмотрены маневры выполнения частичной закрутки и связанные с этим динамические эффекты, а в [20-33] рассмотрены сложные режимы гиростатов в присутствии внешних возмущений.

В работах [34, 35] рассмотрена динамика КА с двойным вращением на активном участке траектории, когда имеет место существенная переменность состава (массы).

Важные исследования в направлении фундаментальных свойств динамики систем в привязке к пространственному движению гироскопов рассмотрены в работах [36, 37, 38]

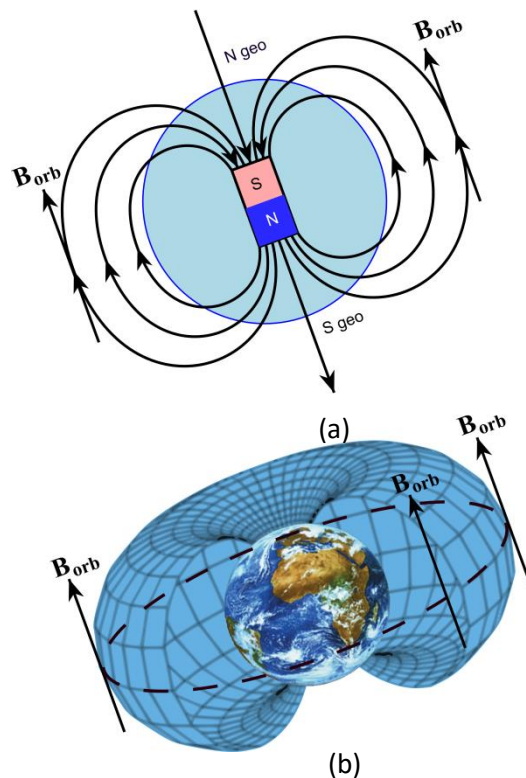
Другими словами, проблема изучения пространственного движения КА и гироскопов остается весьма актуальной, что особенно проявляется в изучении тонких эффектов движения, связанных с вопросами регуляризации/хаотизации динамики, а также разработки новых методов управления движением КА.

Далее приводится детализация получения аналитических решений, следуя базовой статье A.V. Doroshin, Exact Solutions in Attitude Dynamics of a Magnetic Dual-Spin Spacecraft and a Generalization of the Lagrange Top, WSEAS Transactions on Systems, Issue 10, Volume 12 (2013) 471-482).

2 Уравнения углового движения намагниченного космического аппарата с двойным вращением (КАДВ).

Рассмотрим динамику пространственного движения намагниченного КАДВ с постоянным собственным магнитным дипольным моментом \mathbf{m} под действием внешнего восстанавливающего/опрокидывающего момента \mathbf{M}_0 со стороны геомагнитного поля при движении вдоль круговой экваториальной орбите, когда вектор магнитной индукции геомагнитного поля может быть рассмотрен, как постоянная величина \mathbf{B}_{orb} (фиг. 1.1).

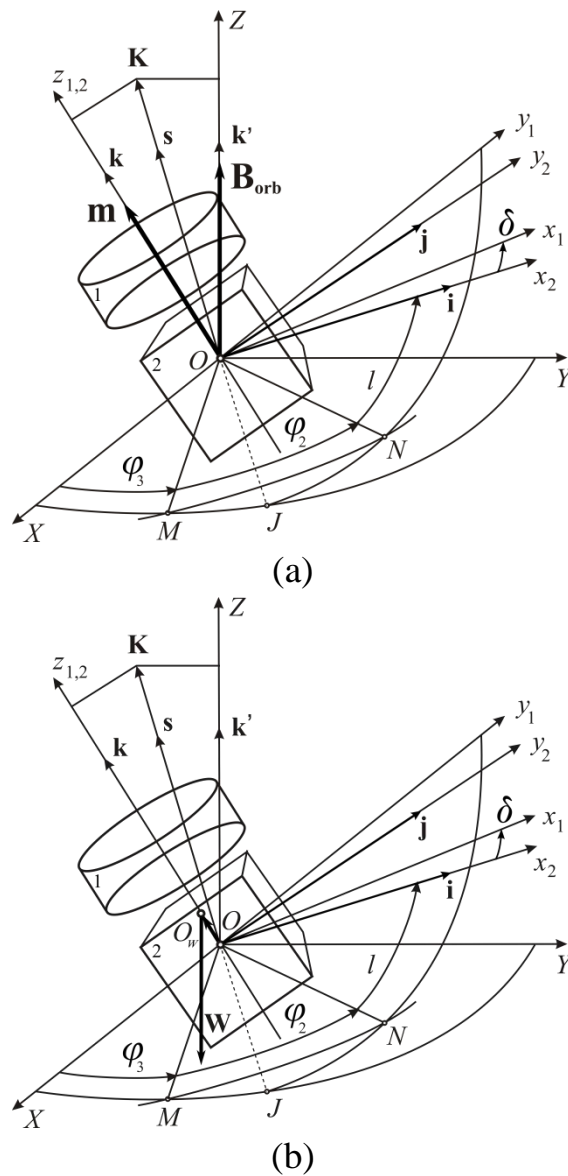
КАДВ состоит из двух тел: тела №1 – «ротор» и тело №2 – «носитель». Угловую скорость вращения тела ротора в абсолютном пространстве будем обозначать ω_1 , а соответствующую угловую скорость тела-носителя, соответственно, как ω_2 . Имеет место связь угловых скоростей соосных тел КАДВ, где учитывается относительное вращение ротора по отношению к телу-носителю σ вдоль общей продольной оси ($\omega_1 = \omega_2 + \sigma$).



Фиг.1.1. Дипольная модель геомагнитного поля Земли (a) и постоянное магнитное поле (вектор магнитной напряженности) вдоль экваториальной круговой орбиты (b)

Введем следующие системы координат (фиг.1.2-а): $OXYZ$ – инерциальная система координат, ось OZ которой сонаправлена с вектором магнитной напряженности (\mathbf{k}' – соответствующий орт оси OZ) тогда $\mathbf{B}_{orb} = B_{orb} \mathbf{k}'$; $Ox_2y_2z_2$

– система координат, связанная телом-носителем ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ соответствующие орты); и $Ox_1y_1z_1$ – связана с телом-ротором. Векторы \mathbf{k}, \mathbf{k}' являются единичными векторами осей OZ и Oz_2 соответственно.



Фиг.2 Намагниченный КАДВ и системы координат (a); намагниченный КАДВ как аналог тяжелого волчка Лагранжа (b) с углами Андуайе-Депри.

Оси Oz_1 и Oz_2 связанных систем координат совпадают с общей осью вращения КАДВ. Пусть главное тело-носитель обладает трехосным тензором инерции, а тело-ротор является динамически симметричным (относительно продольной оси); пусть вектор собственного магнитного момента также совпадает с продольным направлением ($\mathbf{m} = m\mathbf{k}$).

Уравнения движения могут быть записаны на базе динамических уравнений Эйлера, базирующихся на теореме об изменении кинетического момента механической [3-5]

$$\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}^e \quad (1)$$

где \mathbf{K} – есть вектор кинетического момента, $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость «выбранной подвижной системы координат» (эта система координат может совпадать с системой координат одного из тел, а может не совпадать ни с одной из них), \mathbf{M}^e – вектор момента внешних сил.

В качестве «выбранной» системы координат мы возьмем связанную с телом-носителем систему, тогда $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_2$. Поэтому уравнения запишутся в проекциях на оси $Ox_2y_2z_2$ следующим образом:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr + qC_1\sigma = M_{\theta_x} \\ B\dot{q} + (A - C)pr - pC_1\sigma = M_{\theta_y} \\ C\dot{r} + C_1\dot{\sigma} + (B - A)pq = M_{\theta_z} \\ C_1(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_{\Delta} \end{cases} \quad (2)$$

где $\{p, q, r\}$ – компоненты вектора угловой скорости тела-носителя $\boldsymbol{\omega}_2$ в проекциях на собственные связанные оси $Ox_2y_2z_2$; σ – относительная угловая скорость вращения ротора по отношению к телу-носителю ($\sigma = \dot{\delta}$); $\mathbf{I}_2 = \text{diag}[A_2, B_2, C_2]$ – трехосный тензор тнерции тнла-носителя в системе $Ox_2y_2z_2$; $\mathbf{I}_1 = \text{diag}[A_1, A_1, C_1]$ – тензор инерции тела-ротора в системе $Ox_1y_1z_1$; $A = A_1 + A_2$, $B = A_1 + B_2$, $C = C_1 + C_2$ – главные моменты инерции соосных тел в системе $Ox_2y_2z_2$ (включая ротор); $\Delta = C_1(r + \sigma)$ – продольный кинетический момент тела-ротора вдоль оси Oz_1 ; $C_1\sigma = h_{z_1}$ – относительный кинетический момент тела-ротора в системе $Ox_2y_2z_2$. M_{Δ} – внутренний момент сил, действующий между телом-носителем и телом-ротором (мы положим его равным нулю $M_{\Delta} = 0$).

Момент сил магнитного взаимодействия намагниченного КАДВ с геомагнитным полем можно вычислить по следующей формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\text{orb}}; \\ \mathbf{M}_0|_{Ox_2y_2z_2} &= [M_{\theta_x}, M_{\theta_y}, M_{\theta_z}]^T = \\ &= [-B_{\text{orb}}m\gamma_2, B_{\text{orb}}m\gamma_1, 0]^T \end{aligned} \quad (3)$$

Параметры γ_i в выражении (3) представляют собой направляющие косинусы оси OZ в системе $Ox_2y_2z_2$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' = \cos(OZ, Ox_2), \\ \gamma_2 &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' = \cos(OZ, Oy_2), \\ \gamma_3 &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = \cos(OZ, Oz_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Также уравнение (1) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C_2 - B)qr + q\Delta &= -Q\gamma_2; \\ B\dot{q} + (A - C_2)pr - p\Delta &= Q\gamma_1; \\ C_2\dot{r} + \dot{\Delta} + (B - A)pq &= 0; \quad \dot{\Delta} = M_{\Delta} \end{aligned} \quad (5)$$

где $Q = B_{orb}m$.

Пусть имеет место следующее распределение/геометрия масс и ограничение на продольный кинетический момент ротора:

$$A_2 > B_2 > C_2 > A_1 > C_1, \quad \Delta = \text{const} > 0.$$

Также здесь важно вспомнить, что для замыкания систем уравнений требуется добавить кинематические уравнения Эйлера, или уравнения Пуассона (для направляющих косинусов).

Также стоит отметить, что уравнения (1) соответствуют уравнениям движения соосных тел и неуравновешенных гироскопов (т.к. $h_{z_1} = C_1\sigma \neq \text{const}$, даже если $M_{\Delta} = 0$). В этом случае результаты для Кельвиновского гироскопа [1-4, 7-8] не будут актуальными и требуется искать новые аналитические решения.

Известно, что для описания динамики движения систем соосных твердых тел и гироскопов могут быть применены уравнения Гамильтона, записанные в канонических переменных Андуайе-Депри [6, 9, 10, 13, 14, 37, 38] (l, L, I_2, I_3), которые выражаются посредством связей компонентов кинетического момента $\mathbf{K} = \mathbf{K}|_{Ox_2y_2z_2} = [K_{x_2}, K_{y_2}, K_{z_2}]^T$ (фиг.1.2):

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial T}{\partial \dot{l}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{k}; \\ I_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{K}| = K; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_3} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{k}'; \quad L \leq I_2 \\ K_{x_2} &= Ap = \sqrt{I_2^2 - L^2} \sin l; \\ K_{y_2} &= Bq = \sqrt{I_2^2 - L^2} \cos l; \\ K_{z_2} &= C_2r + \Delta = L \end{aligned} \quad (7)$$

Гамильтониан системы [9, 37, 38] в переменных Андуайе-Депри имеет вид:

$$\mathcal{H} = T + P + \varepsilon \mathcal{H}_1$$

$$T = \frac{I_2^2 - L^2}{2} \left[\frac{\sin^2 l}{A_1 + A_2} + \frac{\cos^2 l}{A_1 + B_2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta^2}{C_1} + \frac{(L - \Delta)^2}{C_2} \right], \quad (8)$$

где T – кинетическая энергия системы; P – потенциальная энергия системы; $\varepsilon \mathcal{H}_1$ – малая «возмущенная» часть гамильтониана, связанная с малыми внешними/внутренними возмущениями. В рассматриваемом случае потенциальная энергия определяется только лишь моментом сил магнитного взаимодействия и зависит только от угла нутации [3, 5]:

$$P = Q \cos \theta; \quad M_\theta = -\frac{\partial P}{\partial \theta} = Q \sin \theta \quad (9)$$

Важно здесь подчеркнуть, что рассматриваемая формулировка задачи по своей сути близка к задаче описания движения соосного волчка Лагранжа (Fig.2) [5, 6], характеризующего движение соосной связки в плоском поле тяготения вокруг неподвижной точки O когда сила тяжести \mathbf{W} (вес системы) приложен в точке O_w на общей оси вращения Oz_2 . Тогда формулировки текущей задачи движения намагниченного КАДВ в постоянном магнитном поле и задача Лагранжа совпадут с пересчетом величин:

$$Q = B_{orb} m; \quad Q = -W |OO_w|; \quad (10)$$

Важно также отметить результаты, представленные в работе [39], описывающие динамику волчка Лагранжа для динамически симметричных соосных тел

3 Точные явные решения для угловых скоростей

Рассмотрим движение КАДВ по отношению к инерциальной системе OXYZ (Fig.2) в случае, когда вектор кинетического момента \mathbf{K} направлен вдоль инерциальной оси OZ , т.е. когда $\mathbf{K} = K \mathbf{k}'$ совпадает с вектором напряженности внешнего магнитного поля (\mathbf{B}_{orb} ; \mathbf{W}). Также предположим, что внутреннее взаимодействие соосных тел отсутствует ($M_\Delta = 0$), что сохраняет постоянство продольного кинетического момента тела-ротора Δ . Этот случай является весьма важным т.к. описывает идеализированное движение КАДВ в режиме цилиндрической прецессии.

В этом случае кинетический момент системы будет постоянным и мы будем иметь следующие выражения (4) для направляющих косинусов оси OZ , а также для переменных Андуайе-Депри (6) и угла нутации:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{K_{x_2}}{K} = \frac{Ap}{K}, \\
\gamma_2 &= \frac{K_{y_2}}{K} = \frac{Bq}{K}, \\
\gamma_3 &= \frac{K_{z_2}}{K} = \frac{C_2 r + \Delta}{K}
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
L &= K_{z_2} = C_2 r + \Delta; \\
I_2 &= I_3 = K = \text{const}; \\
\cos \theta &= \frac{K_{z_2}}{K} = \frac{L}{K} = \frac{C_2 r + \Delta}{K},
\end{aligned} \tag{12}$$

Вектор внешнего момента от магнитного взаимодействия в этом случае запишется в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_0|_{Ox_2y_2z_2} &= \left[\frac{-QK_{x_2}}{K}, \frac{QK_{y_2}}{K}, 0 \right]^T = \\
&= \left[\frac{-QAp}{K}, \frac{QBq}{K}, 0 \right]^T
\end{aligned} \tag{13}$$

Тогда динамические уравнения (5) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned}
A\dot{p} + (C_2 - B)qr + q\Delta &= -QBq/K; \\
B\dot{q} + (A - C_2)pr - p\Delta &= QAp/K; \\
C_2\dot{r} + \dot{\Delta} + (B - A)pq &= 0; \quad \dot{\Delta} = M_\Delta
\end{aligned} \tag{14}$$

Получим решения для компонент угловой скорости $\{p, q, r, \sigma\}$ по аналогии с работой [12].

В целях получения этих решений удобно воспользоваться геометрическим подходом, использующим в своем описании кривые-полодии [3, 12]. Полодии – это трехмерные (в нашем случае) кривые соответствующие пересечению эллипсоидов кинетической энергии и кинетического момента в зависимости от начальных условий движения (Фиг.1.3) [3]:

$$\begin{aligned}
Ap^2 + Bq^2 + C_2r^2 + \frac{\Delta^2}{C_1} - 2T_0 &= \\
= 2P(\theta) - 2P(\theta_0)
\end{aligned} \tag{15}$$

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + [C_2 r + \Delta]^2 = K^2 \quad (16)$$

Выражения (15) и (16) с помощью (9) и (12) переписываются в виде

$$A p^2 + B q^2 + C_2 r^2 + \frac{\Delta^2}{C_1} + 2E(C_2 r + \Delta) = 2\tilde{T} \quad (17)$$

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + [C_2 r + \Delta]^2 = K^2 = 2D\tilde{T} \quad (18)$$

где используются следующие константы

$$\begin{aligned} 2T_0 &= A p_0^2 + B q_0^2 + C_2 r_0^2 + \frac{\Delta^2}{C_1}; \\ \tilde{T} &= T_0 - Q \frac{C_2 r_0 + \Delta}{K} = \text{const}; \\ E &= -\frac{Q}{K}; \quad D = \frac{K^2}{2\tilde{T}} \end{aligned} \quad (19)$$

Основываясь на выражениях (17) и (18) и комбинируя их (умножая (17) на A и вычитая (18)), мы получим:

$$\begin{aligned} &B(A - B)q^2 + \\ &+ A \left(C_2 r^2 + \frac{\Delta^2}{C_1} + 2E[C_2 r + \Delta] \right) - \\ &- [C_2 r + \Delta]^2 = 2\tilde{T}(A - D) \end{aligned} \quad (20)$$

Умножение выражения (17) на B с вычитанием (18) дает

$$\begin{aligned} &A(B - A)p^2 + \\ &+ B \left(C_2 r^2 + \frac{\Delta^2}{C_1} + 2E[C_2 r + \Delta] \right) - \\ &- [C_2 r + \Delta]^2 = 2\tilde{T}(B - D) \end{aligned} \quad (21)$$

Выделение полных квадратов в (21) позволяет записать уравнение гиперболы (на координатной плоскости Opr - *фиг.1.3*)

$$\begin{aligned} &-A(A - B)p^2 + \\ &+ C_2(B - C_2) \left[r - \frac{\Delta - EB}{B - C_2} \right]^2 = F \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}
F = & 2\tilde{T}(B - D) + \\
& + \frac{C_2}{B - C_2}(\Delta - EB)^2 - \\
& - \left[\left(\frac{B}{C_1} - 1 \right) \Delta^2 + 2EB\Delta \right]
\end{aligned} \tag{23}$$

Выделение полных квадратов в (20) аналогично позволяет записать уравнение эллипсов (на координатной плоскости Oqr – фиг. 1.3)

$$\begin{aligned}
& B(A - B)q^2 + \\
& + C_2(A - C_2) \left[r - \frac{\Delta - EA}{A - C_2} \right]^2 = H
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
H = & 2\tilde{T}(A - D) + \\
& + \frac{C_2}{A - C_2}(\Delta - EA)^2 - \\
& - \left[\left(\frac{A}{C_1} - 1 \right) \Delta^2 + 2EA\Delta \right]
\end{aligned} \tag{25}$$

Из выражения (22) можно получить

$$p = \pm \sqrt{\frac{C_2(B - C_2) \left[r - \frac{\Delta - EB}{B - C_2} \right]^2 - F}{A(A - B)}} \tag{26}$$

Из (24) мы видим, что

$$r - \frac{\Delta - EA}{A - C_2} = \pm \sqrt{\frac{H - B(A - B)q^2}{C_2(A - C_2)}} \tag{27}$$

С помощью (27) можно записать

$$\begin{aligned}
& r - \frac{\Delta - EB}{B - C_2} = \\
& = \pm \sqrt{\frac{H - B(A - B)q^2}{C_2(A - C_2)}} - \Delta\beta - E\alpha; \\
& \alpha = \frac{A}{A - C_2} - \frac{B}{B - C_2}; \\
& \beta = \frac{1}{B - C_2} - \frac{1}{A - C_2}
\end{aligned} \tag{28}$$

Основываясь на (11) можно переписать второе уравнение (5)

$$B\dot{q} + (A - C_2)pr - p\Delta = -EA\rho$$

Принимая во внимание (28), (26) последнее уравнение приводится к форме

$$\begin{aligned}
 B\dot{q} &= \mp (A - C_2) f_1(q) f_2(q); \\
 f_1(q) &= \sqrt{\frac{C_2(B - C_2)}{A(A - B)} [\pm V - \Delta\beta - E\alpha]^2 - \frac{F}{A(A - B)}}; \\
 f_2(q) &= V; \quad V = \sqrt{\frac{H - B(A - B)q^2}{C_2(A - C_2)}}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Выполним следующую замену (случай 1)

$$x = + \sqrt{\frac{H - B(A - B)q^2}{C_2(A - C_2)}} - \Delta\beta - E\alpha \tag{30}$$

Тогда из (30) следует

$$(x + \Delta\beta + E\alpha)^2 = \frac{H - B(A - B)q^2}{C_2(A - C_2)} \tag{31}$$

$$\begin{cases} q = \pm \sqrt{\frac{H - C_2(A - C_2)(x + \Delta\beta + E\alpha)^2}{B(A - B)}}; \\ dq = \mp \frac{C_2(A - C_2)}{B(A - B)} \frac{(x + \Delta\beta + E\alpha) dx}{\sqrt{\frac{H - C_2(A - C_2)(x + \Delta\beta + E\alpha)^2}{B(A - B)}}} \end{cases} \tag{32}$$

Также можно выполнить замену (случай 2)

$$x = - \sqrt{\frac{H - B(A - B)q^2}{C_2(A - C_2)}} - \Delta\beta - E\alpha \tag{33}$$

Как и в предыдущем случае (30), из (33) снова следуют выражения (31) и (32). Таким образом, мы имеем объединенный случай и уравнение

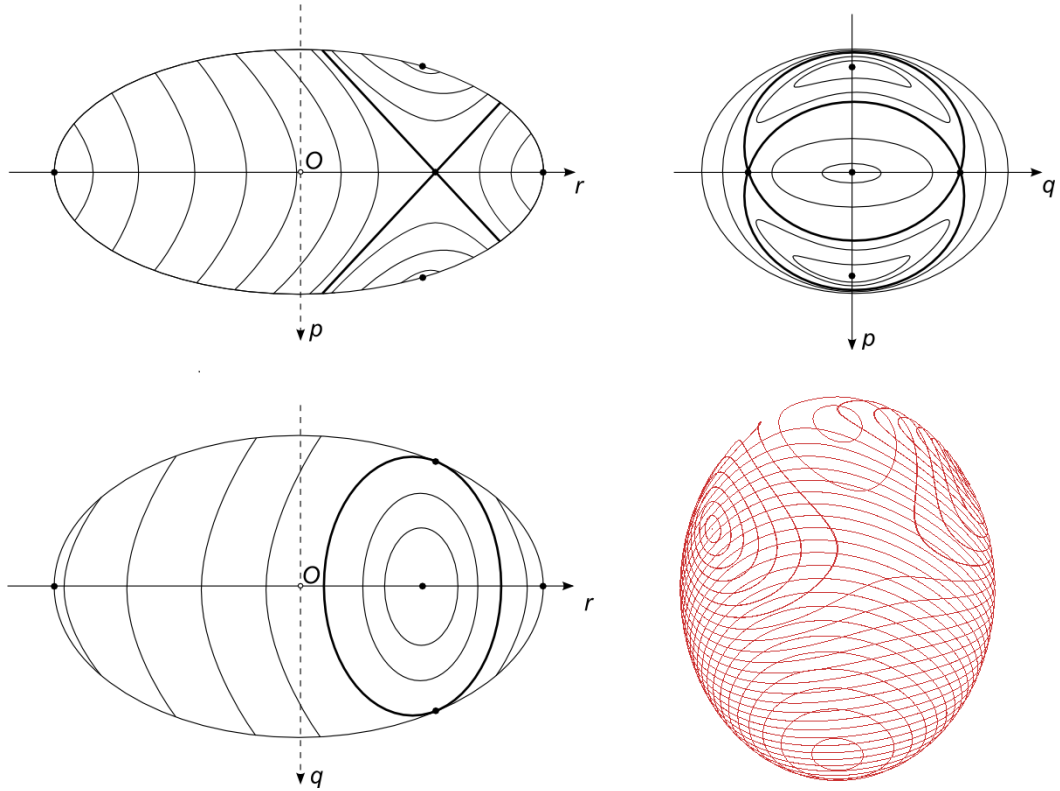
$$dt = \pm \frac{M dx}{\sqrt{H - a(x + b)^2} \sqrt{cx^2 - G}} \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
 M &= C_2 \sqrt{\frac{B}{A - B}}; \quad G = \frac{F}{A(A - B)}; \\
 a &= C_2(A - C_2); \quad b = \Delta\beta + E\alpha; \\
 c &= \frac{C_2(B - C_2)}{A(A - B)}
 \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь необходимо указать разницу между начальными условиями для двух случаев ($i=1, 2$):

$$x(t_0) = x_i^{ini} = (-1)^{i+1} \sqrt{\frac{H - B(A - B)q_0^2}{C_2(A - C_2)}} - \Delta\beta - E\alpha; \quad i = 1, 2$$



Фиг.1.3. Эллипсоид положий

По аналогии с работой [12] перепишем уравнение (34) в разделенных дифференциалах

$$dt = \pm \frac{M}{\sqrt{ac}} \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{H}{a}}\right)^2 - (x+b)^2} \sqrt{x^2 - \left(\sqrt{\frac{G}{c}}\right)^2}} \quad (36)$$

Произведем замену переменных

$$z = \sqrt{\frac{R(x-e)}{P(x+e)}}$$

$$R = -b - d + e; \quad P = -b - d - e \quad (37)$$

$$d = \sqrt{H/a}; \quad e = \sqrt{G/c}$$

Тогда с учетом (37) следует

$$x = \frac{-R/P - z^2}{-R/P + z^2} e; \quad dx = \frac{R}{P} \frac{4ez dz}{(-R/P + z^2)^2} \quad (38)$$

Подстановка (38) в уравнение (36) позволяет записать

$$dt = \pm \frac{4eMR}{P\sqrt{ac} \sqrt{\frac{H}{a} \left(z^2 - \frac{R}{P}\right)^2 - \left(e \left[\frac{-R}{P} - z^2\right] + b \left[z^2 - \frac{R}{P}\right]\right)^2}} \cdot \frac{zdz}{\sqrt{e^2 \left(\frac{-R}{P} - z^2\right)^2 - \frac{G}{c} \left(z^2 - \frac{R}{P}\right)^2}}$$

Последнее уравнение можно представить в форме

$$dt = \pm 2eM \frac{\sqrt{R/P}}{\sqrt{aG}} \left[\sqrt{s_2 s_4} \sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{c_1^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{c_2^2}\right)} \right]^{-1} dz$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{H}{a}} + e - b; \quad s_2 = \frac{R}{P} \left[\sqrt{\frac{H}{a}} - e - b \right]$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{H}{a}} - e + b; \quad s_4 = \frac{R}{P} \left[\sqrt{\frac{H}{a}} + e + b \right]$$

$$c_1^2 = s_2/s_1; \quad c_2^2 = s_4/s_3 \quad (39)$$

Здесь мы должны рассмотреть два случая приведения (39) к эллиптическим первого типа:

1). Если $c_1 < c_2$ мы выполним замену: $z = c_1 y$ при актуальности условия $k = c_1/c_2 < 1$.

2). Если $c_1 > c_2$, тогда: $z = c_2 y$ и $k = c_2/c_1 < 1$.

Уравнение (39) переписывается

$$dt = \pm 2eM \frac{\sqrt{R/P}}{\sqrt{aG}} \frac{c_j dy}{\sqrt{s_2 s_4} \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}; \quad j = 1, 2 \quad (40)$$

где j соответствует номеру случая приведения.

После интегрирования получим

$$\begin{aligned}
\pm \left[N(t - t_0) + I_0 \right] &= \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}; \\
N &= \left[2eM \frac{c_i \sqrt{R/P}}{\sqrt{aG} \sqrt{s_2 s_4}} \right]^{-1}; \\
I_0 &= \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = \text{const}
\end{aligned} \tag{41}$$

Обращение эллиптического интеграла дает аналитический вид решения в эллиптических функциях

$$y(t) = \text{sn} \left[\pm (N(t - t_0) + I_0), k \right] \tag{42}$$

где $\text{sn}(u, k)$ есть эллиптический синус Якоби со следующим классическим определением:

$$\begin{aligned}
u &= \Phi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\vartheta)}}; \\
\varphi &= \varphi(u) = \Phi^{-1}(u); \\
\text{sn}(u, k) &= \sin(\varphi(u));
\end{aligned}$$

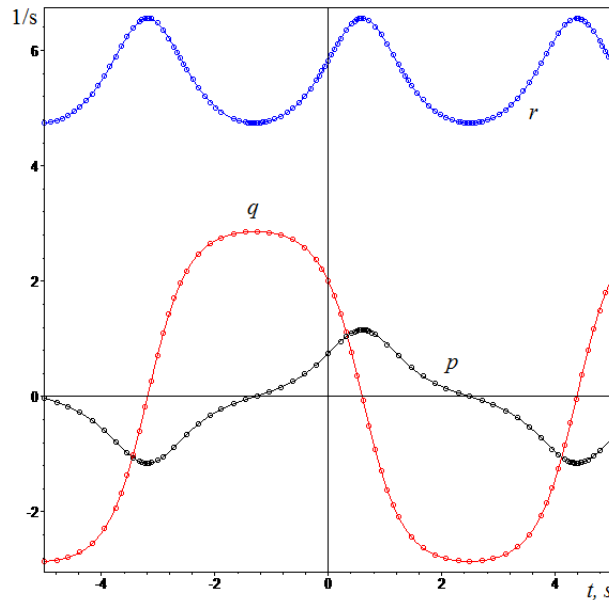
Обратные замены позволяют записать и оставшиеся решения для угловых скоростей:

$$\begin{cases} q(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{B(A - B)} \left[H - C_2(A - C_2)(x(t) + S)^2 \right]} \\ p(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{A(A - B)} \left[C_2(B - C_2)x^2(t) - F \right]} \\ r(t) = \frac{\Delta - EA}{A - C_2} \pm (x(t) + S); \quad \sigma(t) = \frac{\Delta}{C_1} - r(t) \end{cases} \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned}
x(t) &= e \frac{R/P + c_i^2 \text{sn}^2 \left[\pm (N(t - t_0) + I_0), k \right]}{R/P - c_i^2 \text{sn}^2 \left[\pm (N(t - t_0) + I_0), k \right]}, \\
S &= \Delta\beta + E\alpha
\end{aligned} \tag{44}$$

Фиг.1.4 демонстрирует хорошее соответствие решений (43) проверочному численному интегрированию (аналитические решения – точки, численное интегрирование – линии).



Фиг.1.4 Численное интегрирование (линии) и аналитические результаты (точки)

$$A_2=15, B_2=8, C_2=6, A_1=5, C_1=4 \text{ [kg}\cdot\text{m}^2\text{]};$$

$$p_0=0.75, q_0=2, r_0=5.83 \text{ [1/s]};$$

$$\Delta = 5, K=50 \text{ [kg}\cdot\text{m}^2\text{/s]}; Q=100 \text{ [kg}\cdot\text{m}^2\text{/s}^2\text{]}$$

Стоит отметить аналогию между результатами (43) и зависимостями для параметров свободного движения КАДВ [12].

4 Аналитические решения для кинематических параметров

Рассмотрим кинематические аспекты движения намагниченного КАДВ в случае, когда вектор кинетического момента \mathbf{K} сонаправлен с неподвижной осью OZ (фиг.1.2), совпадающей с вектором магнитной индукции геомагнитного поля \mathbf{B}_{orb} .

Как было отмечено ранее, мы можем использовать выражения (11) для определения пространственного положения КАДВ (аналогично волчку Лагранжа), поэтому, по сути, мы уже имеем аналитические решения для этих переменных γ_i ($i = 1..3$), принимая во внимание решения (43). Вместе с тем, необходимо сделать некоторые дополнительные комментарии.

Принимая во внимание компоненты момента сил (13), перезапишем векторное уравнение (1) в подвижной системе, связанной с телом-носителем ($\mathbf{\Omega} = \mathbf{\omega}_2$) в форме

$$\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{\omega}_2 \times \mathbf{K} = \frac{B_{orb}}{K} \mathbf{m} \times \mathbf{K} \quad (45)$$

Уравнение (45) мы можем формально рассматривать как уравнение «свободного» движения, рассматривая динамику намагниченного КАДВ в фиктивной системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\tilde{\Omega}$:

$$\dot{\mathbf{K}} + \tilde{\Omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (46)$$

$$\tilde{\Omega} = \omega_2 - \frac{B_{orb}}{K} \mathbf{m} \quad (47)$$

Однако, как и прежде, для записи уравнений мы будем использовать параметры, записанные в проекциях на связанные оси $Ox_2y_2z_2$ (по-прежнему проецируя уравнение (48) на оси тела-носителя), и тогда указанная угловая скорость будет иметь компоненты

$$\tilde{\Omega}_{Ox_2y_2z_2} = [p, q, r - Q/K]^T \quad (49)$$

При этом кинетический момент будет сохранять свое «вертикальное» значение ($|\mathbf{K}| = K_{OZ} = K = \text{const}$).

Отметим, что именно в этой «фиктивной» системе координат будут справедливы дифференциальные уравнения Пуассона

$$\dot{\gamma} + \tilde{\Omega} \times \gamma = \mathbf{0} \quad (50)$$

для направляющих косинусов $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$ неизменного вектора кинетического момента (направленного вдоль инерциальной оси OZ), с найденными компонентами-решениями (11) и с учетом решений (43):

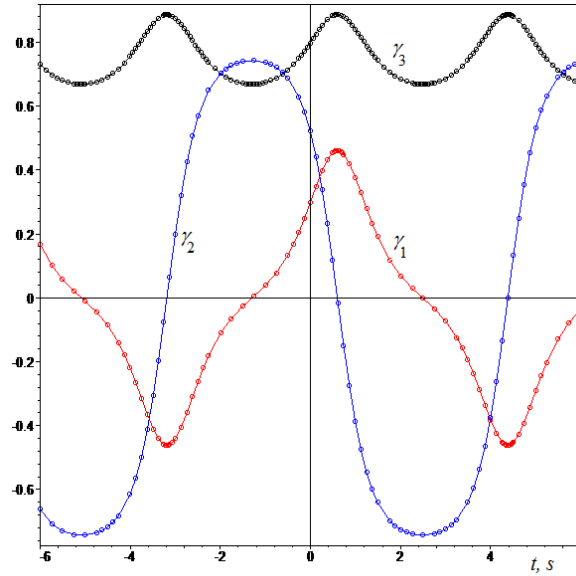
$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= Ap(t)/K, \\ \gamma_2(t) &= Bq(t)/K, \\ \gamma_3 &= (C_2r(t) + \Delta)/K \end{aligned} \quad (51)$$

Также с учетом (43), по аналогии с [12], мы можем записать точные решения для углов Эйлера (θ – угол нутации, φ – угол собственного вращения, ψ – угол прецессии, δ – угол относительной закрутки), рассматривая опять же оси фиктивной подвижной системы координат (координируя их в кинематическом смысле углами Эйлера), вращающейся с угловой скоростью $\tilde{\Omega}$

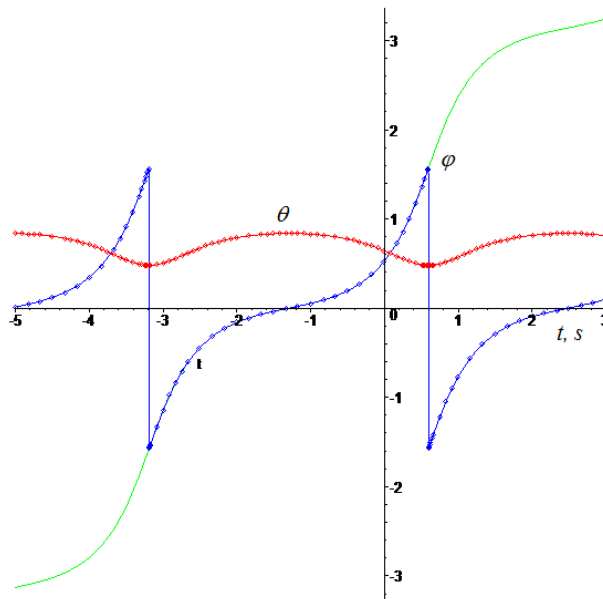
$$\begin{aligned} \cos \theta(t) &= [C_2r(t) + \Delta]/K; \\ \text{tg } \varphi(t) &= \frac{Ap(t)}{Bq(t)} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\psi(t) - \psi_0 = \int_{t_0}^t K \frac{Ap^2(t) + Bq^2(t)}{A^2 p^2(t) + B^2 q^2(t)} dt;$$

$$\delta(t) - \delta_0 = \int_{t_0}^t \left(\frac{\Delta}{C_1} - r(t) \right) dt$$
(53)



Фиг.1.5 Сравнительное моделирование для направляющих косинусов на основе численного интегрирования (линии) и аналитических зависимостей (точки)
 $A_2=15, B_2=8, C_2=6, A_1=5, C_1=4$ [kg·m²]; $p_0=0.75, q_0=2, r_0=5.83$ [1/s]; $\Delta = 5, K=50$ [kg·m²/s]; $Q=100$ [kg·m²/s²]; $\gamma_{10} = 0.3, \gamma_{20} = 0.52, \gamma_{30} = 0.8$



Фиг.1.6 Сравнительное моделирование для углов Эйлера на основе численного интегрирования (линии) и аналитических зависимостей (точки)
 $A_2=15, B_2=8, C_2=6, A_1=5, C_1=4$ [kg·m²]; $p_0=0.75, q_0=2, r_0=5.83$ [1/s]; $\Delta = 5, K=50$ [kg·m²/s]; $Q=100$ [kg·m²/s²], $\theta_0 = 0.64, \varphi_0 = 0.52, \psi_0 = 0.0$

Фигуры 5 и 6 демонстрируют взаимное соответствие результатов численного интегрирования и аналитических решений (51) и (52).

Литература к главе:

- [1] V. Volterra, Sur la théorie des variations des latitudes. Acta Math. 22 (1899).
- [2] N.E. Zhykovski, On the motion of a rigid body with cavities filled with a homogeneous liquid. Collected works, V.1, Moscow-Leningrad, Gostekhisdat, 1949.
- [3] J. Wittenburg, Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner, 1977.
- [4] J. Wittenburg, Beitrage zur dynamik von gyrostaten, Accademia Nazionale dei Lincei, Quaderno N. 227 (1975) 1–187.
- [5] V.V. Golubev, Lectures on Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point, State Publishing House of Theoretical Literature, Moscow, 1953.
- [6] V.V. Kozlov, Methods of qualitative analysis in the dynamics of a rigid body, Gos. Univ., Moscow, 1980.
- [7] A. Elipe, V. Lanchares, Exact solution of a triaxial gyrostat with one rotor, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Issue 1-2, Volume 101, 2008, pp 49-68.
- [8] I. Basak, Explicit solution of the Zhukovski-Volterra gyrostat, Regular and chaotic dynamics Vol.14, N.2 (2009) 223-236.
- [9] E.A. Ivin, Decomposition of variables in task about gyrostat motion. Vestnik MGU (Transactions of Moscow's University). Series: Mathematics and Mechanics. No.3 (1985) Pp. 69-72.
- [10] V.S. Aslanov, Spatial Motion of a Body at Descent in the Atmosphere [in Russian], Moscow: Fizmatlit, 2004, 160 p.
- [11] V.S. Aslanov, Integrable cases in the dynamics of axial gyrostats and adiabatic invariants, Nonlinear Dynamics, Volume 68, Numbers 1-2 (2012) 259-273.
- [12] A.V. Doroshin, Exact solutions for angular motion of coaxial bodies and attitude dynamics of gyrostat-satellites, International Journal of Non-linear Mechanics 50 (2013) 68-74.

- [13] H. Andoyer, *Cours de Mecanique Celeste*, Paris: Gauthier-Villars, 1924.
- [14] A. Deprit, A free rotation of a rigid body studied in the phase plane, *American Journal of Physics* 35 (1967) 425 – 428.
- [15] P. J. Holmes, J. E. Marsden, Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups, *Indiana Univ. Math. J.* 32 (1983) 283-309.
- [16] C.D. Hall, R.H. Rand, Spinup Dynamics of Axial Dual-Spin Spacecraft, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 17, No. 1 (1994) 30–37.
- [17] C.D. Hall, Momentum Transfer Dynamics of a Gyrostat with a Discrete Damper, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 6 (1997) 1072-1075.
- [18] A.I. Neishtadt, M.L. Pivovarov, Separatrix crossing in the dynamics of a dual-spin satellite. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 64, Issue 5, 2000, Pages 709-714.
- [19] A.V. Doroshin, Chaos and its avoidance in spinup dynamics of an axial dual-spin spacecraft. *Acta Astronautica*, Volume 94, Issue 2, February 2014, Pages 563-576.
- [20] M. Inarrea, V. Lanchares, Chaos in the reorientation process of a dual-spin spacecraft with time-dependent moments of inertia, *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 10 (2000) 997-1018.
- [21] A.V. Doroshin, Evolution of the precessional motion of unbalanced gyrostats of variable structure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 72, Issue 3, October 2008, Pages 259-269.
- [22] A.V. Doroshin, M.M. Krikunov, Attitude Dynamics of a Spacecraft with Variable Structure at Presence of Harmonic Perturbations, *Appl. Math. Modelling* (2013), doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.10.021>
- [23] R. Molina, F. Mondéjar, Equilibria and stability for a gyrostat satellite in circular orbit, *Acta Astronautica*, Volume 54, Issue 2 (2004) 77-82.
- [24] Jinlu Kuang, Soonhie Tan, Kandiah Arichandran, A.Y.T. Leung, Chaotic dynamics of an asymmetrical gyrostat, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 36, Issue 8 (2001) 1213-1233.
- [25] Awad El-Gohary, Chaos and optimal control of steady-state rotation of a satellite-gyrostat on a circular orbit, *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 42, Issue (2009) 2842-2851.

- [26] V.A. Bushenkov, M. Yu. Ovchinnikov, G.V. Smirnov, Attitude stabilization of a satellite by magnetic coils, *Acta Astronautica*, Volume 50, Issue 12 (2002) 721-728
- [27] M.Yu. Ovchinnikov, D.S. Roldugin, V.I. Penkov, Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation, *Acta Astronautica* 77 (2012) 48–60
- [28] Yan-Zhu Liua, Hong-Jie Yu, Li-Qun Chen, Chaotic attitude motion and its control of spacecraft in elliptic orbit and geomagnetic field, *Acta Astronautica* 55 (2004) 487 – 494.
- [29] Li-Qun Chen, Yan-Zhu Liu, Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft and its control, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37 (2002) 493–504.
- [30] Li-Qun Chen, Yan-Zhu Liu, Gong Cheng, Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft in a circular orbit near the equatorial plane, *Journal of the Franklin Institute* 339 (2002) 121–128.
- [31] M. Lovera, A. Astolfi, Global Magnetic Attitude Control of Spacecraft in the Presence of Gravity Gradient, *IEEE Transactions On Aerospace And Electronic Systems*, Vol. 42, No. 3 (2006) 796-805.
- [32] M. Lovera, A. Astolfi, Spacecraft attitude control using magnetic actuators, *Automatica* 40 (2004) 1405 – 1414.
- [33] Enrico Silani, Marco Lovera, Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results, *Control Engineering Practice* 13 (2005) 357–371.
- [34] A.V. Doroshin, Synthesis of attitude motion of variable mass coaxial bodies, *WSEAS Transactions on Systems and Control*, Issue 1, Volume 3 (2008) 50-61.
- [35] A.V. Doroshin, Analysis of attitude motion evolutions of variable mass gyrostats and coaxial rigid bodies system, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 45, Issue 2 (2010) 193–205.
- [36] A.V. Doroshin, Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 16, Issue 8 (2011) 3188–3202.
- [37] V.S. Aslanov, A.V. Doroshin, Chaotic dynamics of an unbalanced gyrostat. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 74, Issue 5 (2010) 525-535.

- [38] A.V. Doroshin, Heteroclinic dynamics and attitude motion chaotization of coaxial bodies and dual-spin spacecraft, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 17, Issue 3 (2012) 1460–1474.
- [39] V.S. Aslanov and A.V. Doroshin, Two cases of motion of an unbalanced gyrostat, *Mech. Solids*. 41 (4), 29-39 (2006).

II. СЛУЧАЙ ЛАГРАНЖА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ

(глава основывается на материале статьи [Aslanov, V.S., Doroshin, A.V., About two cases of unbalanced movements of the gyrostats - Mechanics of Solids, No.4 \(2006\), pp. 42-55.](#))

1. Основные положения.

Гиростат как система твердых тел, состоящая из тела-носителя и тел-роторов, вращающихся вокруг неподвижных осей в теле-носителе, рассматривается в работах Жуковского Н.Е. [1], Моисеева Н.Н, Румянцева В.В. [2, 3], Й. Виттенбурга [4], Харламова П.В. [5], Горра Г.В. [6, 7], Кошлякова В.Н. [8], Стрыгина В.В., Соболева В.А. [9,10] и других авторов [11-20]. В работах [1] и [2] проводятся исследования, связанные с анализом твердых тел, содержащих полости с жидкостью, и показано, что математические модели движения таких систем, аналогичны математическим моделям движения «эквивалентного» твердого тела с присоединенными роторами.

Уравнения движения гиростатов вокруг неподвижной точки или эквивалентных твердых тел с полостями, содержащими жидкость, могут быть представлены в векторном виде [4]

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{h} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) = \mathbf{M} \quad (54)$$

где \mathbf{J} – тензор инерции гиростата как системы тела-носителя вместе с роторами, либо тензор инерции эквивалентного тела вместе с жидкими массами ("жиростата" [1]); $\boldsymbol{\omega}$ - вектор абсолютной угловой скорости тела-носителя; \mathbf{h} – суммарный кинетический момент вращающихся роторов в их движении относительно тела-носителя; \mathbf{M} – момент внешних сил. Из уравнения (54) следует, что можно перейти от системы роторов к одному ротору с эквивалентным относительным кинетическим моментом \mathbf{h} . В [4, 8, 18] рассматриваются случаи, когда суммарный кинетический момент вращающихся роторов относительно тела-носителя является заданной функцией времени $\mathbf{h}=\mathbf{h}(t)$.

В работах [4, 6, 16] исследуется движение уравновешенного гиростата, когда относительная угловая скорость поддерживается постоянной и вектор кинетического момента имеет постоянные компоненты в базисе, связанном с телом-носителем.

Движение неуравновешенного ротора описывается с помощью теоремы об изменении кинетического момента [21]

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{J}_r \cdot (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma})] = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_r^e \quad (55)$$

где \mathbf{J}_r – тензор инерции ротора относительно неподвижной точки, $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор относительной угловой скорости ротора (по отношению к телу-носителю), \mathbf{M}_r – момент сил, действующих на ротор со стороны тела-носителя; \mathbf{M}_r^e – момент внешних сил, действующих на ротор.

Будем рассматривать движение тяжелого динамически симметричного гиростата при возможном наличии внутреннего момента взаимодействия между телами.

2. Движение тяжелого неуравновешенного гиростата с произвольным моментом внутреннего взаимодействия. Введем следующие системы координат: $Oxyz$ – подвижная система, жестко связанная с телом-носителем, с началом в неподвижной точке O ; $OXYZ$ – неподвижная в абсолютном пространстве система координат; ось OZ направлена в сторону, противоположную силе тяжести. Момент силы тяжести в проекциях на подвижные оси равен

$$\mathbf{M} = (Pa\gamma_2, -Pa\gamma_1, 0) \quad (56)$$

где P – вес гиростата, a – расстояние от центра тяжести гиростата до неподвижной точки O , γ_i – направляющие косинусы единичного вектора вертикальной неподвижной оси OZ в подвижной системе $Oxyz$ ($i = 1, 2, 3$). Ось вращения ротора совпадает с осью динамической симметрии Oz гиростата и точка O принадлежит этой оси.

Динамические уравнения движения тяжелого симметричного гиростата в осях системы координат $Oxyz$, согласно (54), (55) и (56), запишутся в виде

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr + C_r q\sigma &= Pa\gamma_2 \\ A\dot{q} + (A - C)pr - C_r p\sigma &= -Pa\gamma_1 \\ C\dot{r} + C_r \dot{\sigma} &= 0, \quad C_r (\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r \end{aligned} \quad (57)$$

где $A = A_n + A_r, C = C_n + C_r$ – моменты инерции гиростата в системе $Oxyz$; $A_n = B_n, C_n$ – главные моменты инерции тела-носителя; $A_r = B_r, C_r$ – моменты инерции ротора; $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – угловая скорость несущего тела, $\boldsymbol{\sigma}$ – относительная угловая скорость вращения ротора.

Кинематические уравнения включают в себя уравнений Пуассона [21] и уравнение для угла вращения ротора относительно несущего тела

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \quad \dot{\delta} = \sigma \quad (58)$$

По аналогии с [21] запишем три первых интеграла системы уравнений (2.2) и (2.3)

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (59)$$

$$A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + (Cr + C_r\sigma)\gamma_3 = K_z \quad (60)$$

$$Cr + C_r\sigma = K_z \quad (61)$$

Интегралы (60) и (61) определяют сохранение проекций кинетического момента на неподвижную вертикаль OZ и на ось динамической симметрии гиростата Oz .

Для поиска четвертого интеграла воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии [21]

$$\frac{1}{2} \left[A(p^2 + q^2) + C_n r^2 + C_r (r + \sigma)^2 \right] - T_0 = -Pa\gamma_3 + \int_0^\delta M_r d\delta \quad (62)$$

где T_0 - начальная величина кинетической энергии. Представим последние два уравнения системы (57) в виде

$$C_n \dot{r} = -M_r, \quad C_r (\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r \quad (63)$$

Умножая первое уравнение на r , а второе – на $(r + \sigma)$

$$\frac{1}{2} C_n dr^2 = -M_r r dt, \quad \frac{1}{2} C_r d(r + \sigma)^2 = M_r (r + \sigma) dt$$

и складывая два последних соотношения, получим работу внутреннего момента

$$\int_0^\delta M_r d\delta = \frac{1}{2} \left[C_n r^2 + C_r (r + \sigma)^2 \right] + const, \quad (d\delta = \sigma dt)$$

Сопоставляя эту формулу и выражение (62), запишем четвертый интеграл в виде

$$\frac{A}{2} (p^2 + q^2) + Pa\gamma_3 = const \quad (64)$$

Первые интегралы (2.4)-(2.6) и (2.9) совпадают с аналогичными первыми интегралами движения тяжелого твердого тела в случае Лагранжа [21]. Очевидно, что динамически симметричный тяжелый уравновешенный гириостат совершает движение, подобное движению тяжелого осесимметричного твердого тела. Ранее в работах [15, 18] качественно показывалась возможность обобщения задачи о движении тяжелого тела в случае Лагранжа для уравновешенного гириостата и движения тела в жидкости.

Найдем общие решения уравнений движения тяжелого неуравновешенного динамически симметричного гириостата. Перейдем от направляющих косинусов к углам Эйлера [21], записанным для тела-носителя

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta$$

и заменим уравнения Пуассона (2.3) на кинематические уравнения Эйлера

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \quad (65)$$

Далее воспользуемся аналогией с задачей о движении тяжелого твердого тела [21-23]. С помощью уравнений (65) интегралы (60) и (64) приведем к виду

$$\dot{\psi} \sin^2 \theta + R \cos \theta = G, \quad \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + 2g \cos \theta = H \quad (66)$$

где $g = Pa / A$, $R = K_z / A$, $G = K_z / A$. После замены переменных $u = \cos \theta$ вторая формула из (66) превращается в кубический многочлен относительно u , имеющий три вещественных корня u_1 , u_2 , и u' ($-1 < u_1 \leq u_0 \leq u_2 < 1 < u' < \infty$, $u_0 = \cos \theta_0$)

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = f(u) = (H - 2gu)(1 - u^2) - (G - Ru)^2 = 2g(u - u_1)(u - u_2)(u - u') \quad (67)$$

Очевидно, что переменная u должна изменяться в пределах: $u_1 \leq u \leq u_2$. С помощью введения новой переменной ξ

$$u = u_1 \cos^2 \xi + u_2 \sin^2 \xi \quad (68)$$

на основании (67) можно записать

$$\frac{d\xi}{dt} = \pm \beta \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \xi)} \quad \left(\beta = \sqrt{g(u' - u_1)/2}, \quad k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u' - u_1}, \quad 0 \leq k^2 < 1 \right) \quad (69)$$

Интегрирование (69) дает следующий результат:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}} = \pm \int_0^t \beta dt$$

где ξ_0 находится из уравнения: $\cos \theta_0 = u_1 \cos^2 \xi_0 + u_2 \sin^2 \xi_0$, а знак перед интегралом в правой части определяется начальными условиями движения.

С помощью амплитуды Якоби последнее выражение можно переписать в виде

$$\xi = \operatorname{am}(\beta t + \alpha, k), \quad \alpha = \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}} = \operatorname{const}$$

тогда общее решение для угла нутации примет вид

$$\cos \theta = (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\beta t + \alpha, k) + u_1 \quad (70)$$

Квадратура для угла прецессии последует из первого соотношения (66) и решения (70) и приведет к комбинации неполных эллиптических интегралов третьего рода [23].

Литература к главе:

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Сочинения. т. II, вып. 1. Госуд. научно-техн. издательство, Москва-Ленинград, 1931
2. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965
3. Румянцев В.В. Об устойчивости движений гироскопов // Прикладная математика и механика. Т. XXV, вып. 1, 1961
4. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М: Мир, 1980
5. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд. Новосиб. ун-та. Ч. 1, 1965
6. Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я. Нелинейный анализ поведения механических систем. Киев: Наукова думка, 1984
7. Харламова Е.И., Горр Г.В. О безнутационных движениях твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. Республиканский межведомственный сборник АН УССР. Вып. 8, 1976
8. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985

9. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Влияние геометрических и кинетических параметров и диссипации энергии на устойчивость ориентации спутников с двойным вращением // Космические исследования. Т.14, №3, 1976
10. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988
11. Volterra V. Sur la theorie des variations des latitudes // Acta Mathem., V.22., 1899
12. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников // Сборник статей под редакцией Белецкого В.В. М.: Мир, 1975
13. Румянцев В.В. Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. №4, 1980
14. Ивин Е.А. Разделение переменных в задаче о движении гиростата // Вестник МГУ, Сер.1. Математика, механика. №3, 1985
15. Орешкина Л.Н. Объединение двух задач динамики твердого тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. №5, 1986
16. Яхья Х.М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестник МГУ, Сер.1. Математика, механика. №4, 1987
17. Нейштадт А.И., Пивоваров М.Л. Переход через сепаратрису в динамике спутника с двойным вращением // Прикладная математика и механика. Т.64, вып. 5, 2000
18. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Москва-Ижевск: Изд-во РХД, 2001
19. Асланов В.С., Дорошин А.В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере // Космические исследования. Т. 40. № 2, 2002
20. Асланов В.С., Дорошин А.В. Движение системы соосных тел переменной массы // Прикладная математика и механика. Т.68, вып.6, 2004
21. Бухгольц Н.Н. Основы курса теоретической механики. Ч.II. М: Наука, 1972
22. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1944
23. Асланов В.С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004
24. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975

III. РЕАЛИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ МУЛЬТИСКРОЛЬНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ В ДИНАМИКЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СИСТЕМОЙ СПАРЕННЫХ МАХОВИКОВ

Введение

Рассматривается возможность реализации режимов мультискрольных аттракторов [1, 2, 5-29] в динамике космического аппарата с многороторными системами спаренных маховиков [3, 4]. Подобные многороторные системы могут использоваться для выполнения маневров угловой переориентации космических аппаратов на основе сопряженных раскруток-захватов роторов с мгновенным перераспределением кинетического момента между основным телом-корпусом аппарата и телами-роторами. Динамическая система многороторного космического аппарата (уравнения пространственного/углового движения) приводится к динамическим системам, содержащим странные мультискрольные аттракторы (Lorenz, Sprott, Wang, Qi, Li, Chen, Lü, Liu, Čelíkovský, Burke, Shaw, Arneodo, Couillet, и др.) [1-29]. Определяются соответствия между инерционно-массовыми и кинематическими параметрами аппарата, при которых в его динамике реализуются мультискрольные хаотические аттракторы. Актуальность исследований характеризуется принципиальным выявлением возможности реализации хаотического движения, параметрическим анализом и соответствующим парированием захвата динамики космического аппарата в хаотические режимы (выход на хаотический аттрактор в фазовом пространстве) при реализации угловых переориентаций. Научная тематика работы связана с исследованиями новых аспектов хаотических свойств движения, рассмотренных ранее [5, 30-32].

В настоящей главе, мотивируясь недавними результатами [1], предпринимается попытка построить связь между моделями многороторного космического аппарата (КА-гиростата) с динамическими системами, содержащими в своих фазовых пространствах мультискрольные хаотические аттракторы (МСА) [1-29].

Рассматриваемый класс КА [3] представляет собой твердое тело-носитель, содержащее сопряженные пары роторов по главным осям инерции (фиг.3.1). Главные свойства динамики такого КА и способ переориентации посредством сопряженных раскруток-захватов и быстрыми (в идеальном представлении

мгновенными) перераспределениями кинетического момента между телом-носителем и телами-роторами были описаны ранее в работах [3, 4].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КА

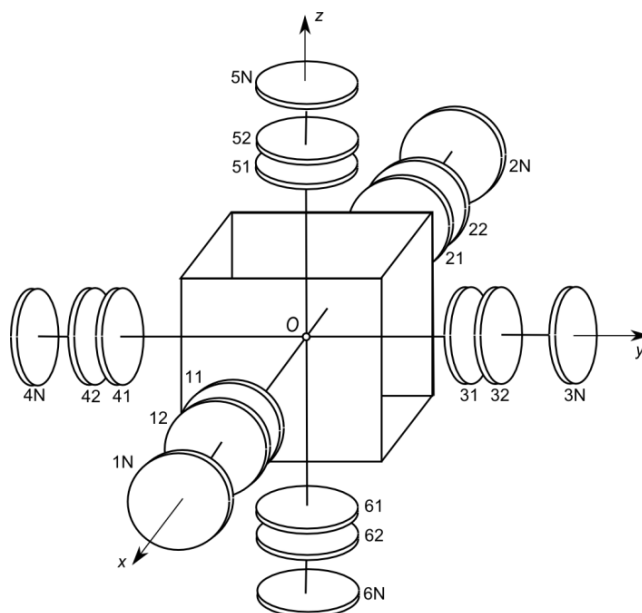
Рассмотрим КА с симметричным «послойным» расположением роторов относительно центра масс O при эквивалентности их инерционно-массовых параметров. Следуя работе [3], мы можем записать динамические уравнения движения КА на основе теоремы об изменении кинетического момента в проекциях на главные оси связанной системы координат $Oxyz$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_r \quad (71)$$

где \mathbf{K}_m - кинетический момент главного тела-носителя с неподвижными «замороженными» роторами; \mathbf{K}_r - относительный кинетический момент роторов. Динамические уравнения в подвижной связанной системе координат $Oxyz$ запишутся

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}^e \quad (72)$$

где \mathbf{M}^e есть главный момент внешних сил.



Фиг.3.1 – Схема многороторного КА

Рассматриваемая система в ее обобщенном виде содержит $6N$ роторов. Кинетический момент может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_m &= \begin{bmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_r = \sum_{l=1}^N I_l \begin{bmatrix} \sigma_{1l} + \sigma_{2l} \\ \sigma_{3l} + \sigma_{4l} \\ \sigma_{5l} + \sigma_{6l} \end{bmatrix}; \\
A &= \tilde{A} + 4\bar{J} + 2\bar{I}, \quad B = \tilde{B} + 4\bar{J} + 2\bar{I}, \\
C &= \tilde{C} + 4\bar{J} + 2\bar{I}; \quad \bar{J} = \sum_{l=1}^N J_l; \quad \bar{I} = \sum_{l=1}^N I_l;
\end{aligned} \tag{73}$$

где $\boldsymbol{\omega}=[p, q, r]^T$ – вектор абсолютной угловой скорости тела-носителя; $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ – главные моменты инерции тела-носителя; σ_{kl} – относительная угловая скорость kl -ротора (относительно тела-носителя); I_l и J_l – продольный и экваториальный момент инерции ротора относительно точки O в l -слое.

Уравнения (72) в скалярной форме запишутся

$$\left\{ \begin{aligned}
& A\dot{p} + \sum_{l=1}^N I_l (\dot{\sigma}_{1l} + \dot{\sigma}_{2l}) + (C - B)qr + \\
& \quad + \left[q \sum_{l=1}^N I_l (\sigma_{5l} + \sigma_{6l}) - r \sum_{l=1}^N I_l (\sigma_{3l} + \sigma_{4l}) \right] = M_x^e; \\
& B\dot{q} + \sum_{l=1}^N I_l (\dot{\sigma}_{3l} + \dot{\sigma}_{4l}) + (A - C)pr + \\
& \quad + \left[r \sum_{l=1}^N I_l (\sigma_{1l} + \sigma_{2l}) - p \sum_{l=1}^N I_l (\sigma_{5l} + \sigma_{6l}) \right] = M_y^e; \\
& C\dot{r} + \sum_{l=1}^N I_l (\dot{\sigma}_{5l} + \dot{\sigma}_{6l}) + (A - C)qp + \\
& \quad + \left[p \sum_{l=1}^N I_l (\sigma_{3l} + \sigma_{4l}) - q \sum_{l=1}^N I_l (\sigma_{1l} + \sigma_{2l}) \right] = M_z^e;
\end{aligned} \right. \tag{74}$$

Уравнения относительного движения роторов ($l = 1..N$) имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
& I_l (\dot{p} + \dot{\sigma}_{1l}) = M_{1l}^i + M_{1lx}^e; \quad I_l (\dot{p} + \dot{\sigma}_{2l}) = M_{2l}^i + M_{2lx}^e \\
& I_l (\dot{q} + \dot{\sigma}_{3l}) = M_{3l}^i + M_{3ly}^e; \quad I_l (\dot{q} + \dot{\sigma}_{4l}) = M_{4l}^i + M_{4ly}^e \\
& I_l (\dot{r} + \dot{\sigma}_{5l}) = M_{5l}^i + M_{5lz}^e; \quad I_l (\dot{r} + \dot{\sigma}_{6l}) = M_{6l}^i + M_{6lz}^e
\end{aligned} \right. \tag{75}$$

где $M_{jlx}^e, M_{jly}^e, M_{jly}^e$ – внешние моменты, действующие на jl -ротор, M_{jl}^i – внутренний момент сил, действующих между телом-носителем и jl -ротором (момент внутреннего двигателя соответствующего ротора).

Также уравнения (74) могут быть записаны в форме, характерной для неуровновешенного гиростата [3]

$$\begin{cases} \hat{A}\dot{p} + \dot{D}_{12} + (\hat{C} - \hat{B})qr + [qD_{56} - rD_{34}] = M_x^e \\ \hat{B}\dot{q} + \dot{D}_{34} + (\hat{A} - \hat{C})rp + [rD_{12} - pD_{56}] = M_y^e \\ \hat{C}\dot{r} + \dot{D}_{56} + (\hat{B} - \hat{A})pq + [pD_{34} - qD_{12}] = M_z^e \end{cases} \quad (76)$$

$$\dot{D}_{12} = M_{12}^i + M_{12}^e; \quad \dot{D}_{34} = M_{34}^i + M_{34}^e; \quad \dot{D}_{56} = M_{56}^i + M_{56}^e, \quad (77)$$

где $\hat{A} = A - 2\sum_{j=1}^N I_j$; $\hat{B} = B - 2\sum_{j=1}^N I_j$; $\hat{C} = C - 2\sum_{j=1}^N I_j$, D_{ij} – суммированные

кинетические моменты роторов:

$$\begin{aligned} D_{12} &= \sum_{j=1}^N [\Delta_{1j} + \Delta_{2j}], \quad D_{34} = \sum_{j=1}^N [\Delta_{3j} + \Delta_{4j}], \quad D_{56} = \sum_{j=1}^N [\Delta_{5j} + \Delta_{6j}]; \\ \Delta_{1j} &= I_j(p + \sigma_{1j}); \quad \Delta_{2j} = I_j(p + \sigma_{2j}); \\ \Delta_{3j} &= I_j(q + \sigma_{3j}); \quad \Delta_{4j} = I_j(q + \sigma_{4j}); \\ \Delta_{5j} &= I_j(r + \sigma_{5j}); \quad \Delta_{6j} = I_j(r + \sigma_{6j}); \end{aligned} \quad (78)$$

и суммированные внешние моменты роторов

$$\begin{aligned} M_{12}^i &= \sum_{l=1}^N (M_{1l}^i + M_{2l}^i), \quad M_{12}^e = \sum_{l=1}^N (M_{1lx}^e + M_{2lx}^e), \quad M_{34}^i = \sum_{l=1}^N (M_{3l}^i + M_{4l}^i), \\ M_{34}^e &= \sum_{l=1}^N (M_{3ly}^e + M_{4ly}^e), \quad M_{56}^i = \sum_{l=1}^N (M_{5l}^i + M_{6l}^i), \quad M_{56}^e = \sum_{l=1}^N (M_{5lz}^e + M_{6lz}^e) \end{aligned} \quad (79)$$

2. ПРИВЕДЕНИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КА К ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ С ХАОТИЧЕСКИМИ МУЛЬТИСКРОЛЬНЫМИ АТТРАКТОРАМИ

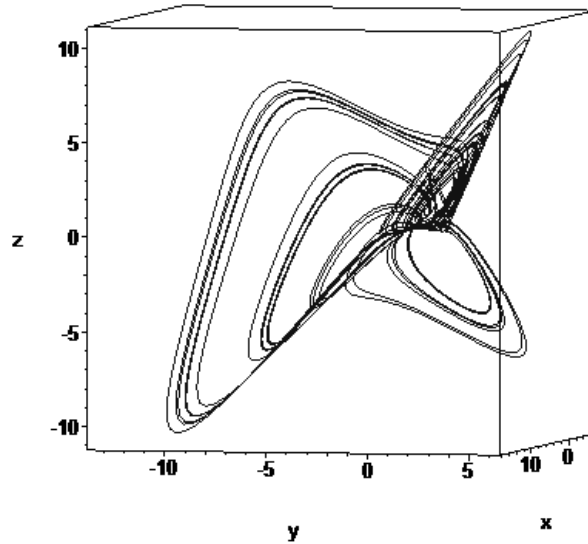
Как отмечено в недавней работе [1] естественными «кандидатами» для построения систем с мультискрольными аттракторами являются трехмерные (3D) квадратические динамические системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz; \\ \dot{y} = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_7xy + b_8xz + b_9yz; \\ \dot{z} = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6z^2 + c_7xy + c_8xz + c_9yz; \end{cases} \quad (80)$$

где $\{a_i, b_i, c_i\}_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{30}$ – есть набор параметров (бифуркационный набор). Так, например, в работе [1], базируясь на структуре (80), представлена система с

трехскрольным (три «крыла») хаотическим аттрактором (фиг.3.2) для следующих параметров (остальные являются нулевыми):

$$\begin{cases} a_1 = 1; a_2 = -1; a_3 = 0.5; a_9 = -3; \\ b_1 = -0.1; b_2 = -6; b_8 = 1; b_9 = -1; \\ c_1 = 0.06; c_2 = -10; c_3 = -5; c_7 = 2; c_8 = 0.23 \end{cases}$$



Фиг.3.2 – Трехскрольный аттрактор в системе [1]

Как будет видно далее, мы можем вполне естественным образом осуществить приведение уравнений (76) к предложенному виду (80). Так, рассмотрим динамику многороторного КА для довольно типичной ситуации с линейными управляющими внутренними моментами роторов, пропорциональными компонентам углового ускорения тела-носителя:

$$\begin{aligned} M_{12}^i &= \alpha_p \dot{p} + \alpha_q \dot{q} + \alpha_r \dot{r}; \\ M_{34}^i &= \beta_p \dot{p} + \beta_q \dot{q} + \beta_r \dot{r}; \\ M_{56}^i &= \gamma_p \dot{p} + \gamma_q \dot{q} + \gamma_r \dot{r}, \end{aligned} \tag{81}$$

$\{\alpha_p \dots \gamma_r\}$ - константы, соответствующие коэффициентам усиления сигналов акселерометра. В этом случае для суммированных кинетических моментов роторов мы получим следующие зависимости, основываясь на простых решениях уравнений (77)

$$\begin{aligned}
D_{12} &= \alpha_p p + \alpha_q q + \alpha_r r + \alpha_0; \\
D_{34} &= \beta_p p + \beta_q q + \beta_r r + \beta_0; \\
D_{56} &= \gamma_p p + \gamma_q q + \gamma_r r + \gamma_0,
\end{aligned} \tag{82}$$

где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ – константы, соответствующие начальным условиям движения. Принимая во внимание (82), можно разрешить уравнения (76) относительно угловых ускорений

$$\dot{p} = \frac{\Delta_p}{\Delta_0}; \quad \dot{q} = \frac{\Delta_q}{\Delta_0}; \quad \dot{r} = \frac{\Delta_r}{\Delta_0}, \tag{83}$$

где

$$\left\{ \begin{aligned}
\Delta_0 &= (\hat{A} + \alpha_p)(\hat{B} + \beta_q)(\hat{C} + \gamma_r) + \alpha_q \beta_r \gamma_p + \alpha_r \beta_p \gamma_q - \\
&\quad - \alpha_r \gamma_p (\hat{B} + \beta_q) - \beta_r \gamma_q (\hat{A} + \alpha_p) - \alpha_q \beta_p (\hat{C} + \gamma_r); \\
\Delta_p &= \mathfrak{M}_x (\hat{B} + \beta_q)(\hat{C} + \gamma_r) + \alpha_q \beta_r \mathfrak{M}_z + \alpha_r \gamma_q \mathfrak{M}_y - \\
&\quad - \alpha_r (\hat{B} + \beta_q) \mathfrak{M}_z - \beta_r \gamma_q \mathfrak{M}_x - \alpha_q (\hat{C} + \gamma_r) \mathfrak{M}_y; \\
\Delta_q &= \mathfrak{M}_y (\hat{A} + \alpha_p)(\hat{C} + \gamma_r) + \alpha_r \beta_p \mathfrak{M}_z + \beta_r \gamma_p \mathfrak{M}_x - \\
&\quad - \alpha_r \gamma_p \mathfrak{M}_y - \beta_p (\hat{C} + \gamma_r) \mathfrak{M}_x - \beta_r (\hat{A} + \alpha_p) \mathfrak{M}_z; \\
\Delta_r &= \mathfrak{M}_z (\hat{A} + \alpha_p)(\hat{B} + \beta_q) + \alpha_q \gamma_p \mathfrak{M}_y + \beta_p \gamma_q \mathfrak{M}_x - \\
&\quad - \gamma_p (\hat{B} + \beta_q) \mathfrak{M}_x - \alpha_q \beta_p \mathfrak{M}_z - \gamma_q (\hat{A} + \alpha_p) \mathfrak{M}_y;
\end{aligned} \right. \tag{84}$$

со следующими квадратическими зависимостями

$$\left\{ \begin{aligned}
\mathfrak{M}_x &= \mathfrak{M}_x(p, q, r) = M_x^e(p, q, r) - \gamma_0 q + \beta_0 r + \\
&\quad + [\beta_q - \gamma_r - (\hat{C} - \hat{B})]qr - \gamma_p pq + \beta_p pr - \gamma_q q^2 + \beta_r r^2; \\
\mathfrak{M}_y &= \mathfrak{M}_y(p, q, r) = M_y^e(p, q, r) - \alpha_0 r + \gamma_0 p + \\
&\quad + [\gamma_r - \alpha_p - (\hat{A} - \hat{C})]rp - \alpha_q qr + \gamma_q qp - \alpha_r r^2 + \gamma_p p^2; \\
\mathfrak{M}_z &= \mathfrak{M}_z(p, q, r) = M_z^e(p, q, r) - \beta_0 p + \alpha_0 q + \\
&\quad + [\alpha_p - \beta_q - (\hat{B} - \hat{A})]pq - \beta_r rp + \alpha_r rq - \beta_p p^2 + \alpha_q q^2;
\end{aligned} \right. \tag{85}$$

Уравнения (83) (с линейными комбинациями (84) квадратических членов (85)) могут быть приведены к форме (80) при следующем переопределении/переобозначении переменных ($p \leftrightarrow x; q \leftrightarrow y; r \leftrightarrow z$) и при

явном выражении параметров $\{a_i, b_i, c_i\}_{0 \leq i \leq 9}$ через величины $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \alpha_0, \alpha_j, \beta_0, \beta_j, \gamma_0, \gamma_j\}_{j=p,q,r} \in \mathbb{R}^{15}$.

Более того, необходимо здесь отметить, что мы пока никак не конкретизировали внешние моменты $M_{x,y,z}^e$. Пусть теперь внешние моменты определяются как линейные диссипативные/экситативные моменты вида:

$$\begin{aligned} M_x^e &= m_{x0} + m_{xp}p + m_{xq}q + m_{xr}r; \\ M_y^e &= m_{y0} + m_{yp}p + m_{yq}q + m_{yr}r; \\ M_z^e &= m_{z0} + m_{zp}p + m_{zq}q + m_{zr}r, \end{aligned} \quad (86)$$

с набором постоянных $\{m_{ij}\}_{i=x,y,z; j=0,p,q,r} \in \mathbb{R}^{12}$.

Также мы введем в рассмотрение внешние моменты гироскопического вида

$$\begin{aligned} M_x^e &= g_{pqx}pq + g_{prx}pr + g_{qrx}qr; \\ M_y^e &= g_{pqy}pq + g_{pry}pr + g_{qry}qr; \\ M_z^e &= g_{pqz}pq + g_{prz}pr + g_{qrz}qr, \end{aligned} \quad (87)$$

с набором постоянных $\{g_{ijk}\}_{i,j=p,q,r; k=x,y,z} \in \mathbb{R}^9$.

Таким образом, можно резюмировать, что уравнения движения КА (76) являются приводимыми естественным путем (при естественных внешних и внутренних управляющих воздействиях) к динамическим системам с мультискрольными аттракторами [1].

3. ПРИМЕРЫ ПРИВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КА К ИЗВЕСТНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ С МУЛЬТИСКРОЛЬНЫМИ АТТРАКТОРАМИ

Анализ и сопоставление параметров систем позволяют отметить следующие соответствия, отражающие прямую приводимость модели движения КА к известным динамическим системам с МСА, что, в свою очередь, определяет возможность реализации динамического режима аттрактора в движении КА с переходом к хаотической динамике.

3.1. Аттрактор Dequan Li

Укажем параметры КА, при которых реализуется выход на систему и соответствующий аттрактор Dequan Li attractor [6]:

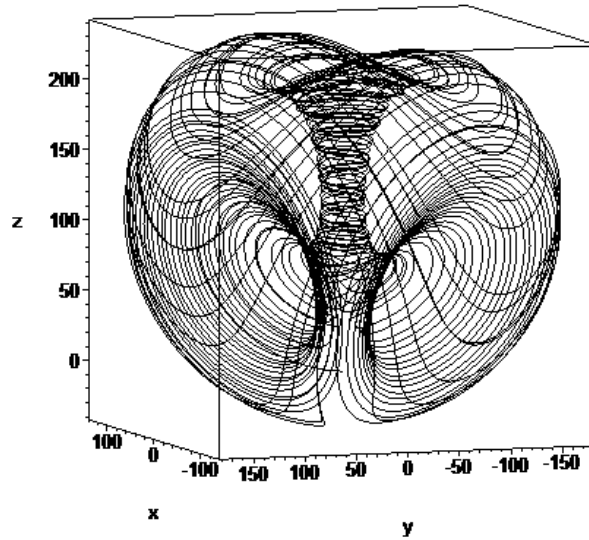
$$\begin{aligned}
\forall \hat{C}; \quad \hat{B} = \hat{C}; \quad \hat{A} = \frac{2\hat{C}}{1 + \delta^2}; \quad \varepsilon = \frac{\hat{A}}{\hat{C}} \delta; \\
D_{34} = \hat{A} \delta p; \quad M_x^e = \hat{A} \alpha (q - p); \\
M_y^e = \hat{B} (\rho p + \zeta q); \quad M_z^e = \hat{C} \beta r + \hat{A} \delta^2 p q;
\end{aligned} \tag{88}$$

В указанном случае мы получаем уравнения Dequan Li [6] с фазовым пространством, содержащим трехскрольный аттрактор (фиг.3.3):

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha (y - x) + \delta x z, \\ \dot{y} = \rho x + \zeta y - x z, \\ \dot{z} = \beta z + x y - \varepsilon x^2, \end{cases}$$

$$\alpha = 40; \beta = 1.833; \delta = 0.16;$$

$$\varepsilon = 0.65; \rho = 55; \zeta = 20.$$



Фиг.3.3 – Хаотический аттрактор Dequan Li [6]

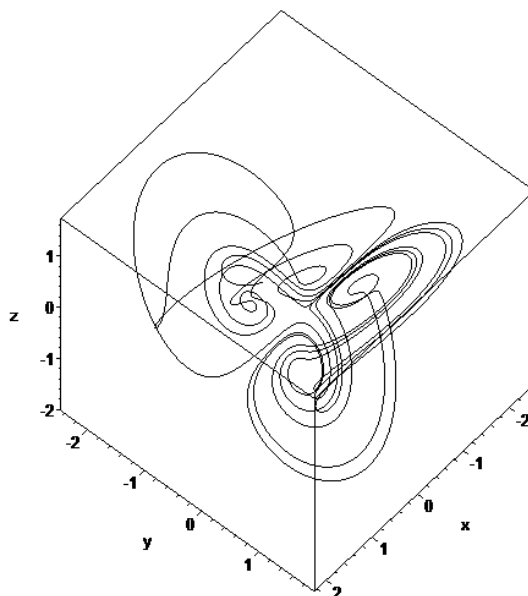
3.2. Аттрактор Wang-Sun

Для реализации другого интересного аттрактора – аттрактора в системе Wang-Sun [11], как показывает анализ/синтез соответствий параметров, КА должен обладать следующими параметрами:

$$\begin{aligned}
\forall \hat{A}; \quad \hat{B} > \hat{A}; \quad \hat{C} = \hat{B} - \hat{A}; \quad (\xi = 1; \zeta = -1); \\
D_{ij} = 0; \quad M_x^e = \hat{A} \alpha p; \\
M_y^e = \hat{B} (\beta p + \delta q); \quad M_z^e = \hat{C} \varepsilon r;
\end{aligned} \tag{89}$$

В этом случае уравнения движения КА приводятся к уравнениям Wang-Sun [11], содержащим в своем фазовом пространстве четырехскрольный хаотический аттрактор (фиг.3.4):

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \xi yz, \\ \dot{y} = \beta x + \delta y - xz, \\ \dot{z} = \varepsilon z + \zeta xy, \end{cases} \quad \begin{aligned} \alpha &= 0.2; \beta = -0.01; \xi = 1; \\ \delta &= -0.4; \varepsilon = -1; \zeta = -1. \end{aligned}$$



Фиг.3.4 – Аттрактор Wang-Sun [11]

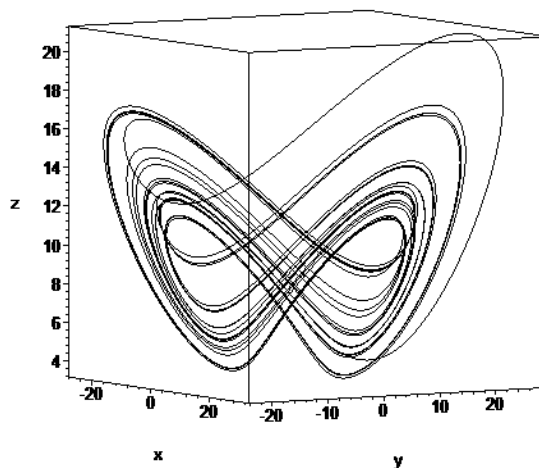
3.3. Аттрактор Chen-Lee

В заключение рассмотрим случай приведения уравнений движения КА к динамической системе Chen-Lee [20], который реализуется при следующем назначении параметров КА:

$$\forall \hat{C}; \quad \hat{B} = \frac{\hat{C}}{3}; \quad \hat{A} = \frac{2\hat{C}}{3}; \quad D_{ij} = 0; \quad M_x^e = \hat{A}\alpha p; \quad M_y^e = \hat{B}\beta p; \quad M_z^e = \hat{C}\delta r; \quad (90)$$

В этом случае уравнения принимают вид системы Chen-Lee system [20] с двухскрольным хаотическим аттрактором (фиг.3.5):

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - yz, \\ \dot{y} = \beta y + xz, \\ \dot{z} = \delta z + \frac{1}{3}xy, \end{cases} \quad \alpha = 5; \beta = -10; \delta = -3.8.$$



Фиг.3.5 – Аттрактор Chen-Lee [20]

Таким образом, рассмотренные в работе приводимые друг к другу модели/системы характеризуют собой многочисленные возможности реализации динамических режимов движения многороторных КА (спутников-гиростатов) вдоль хаотических аттракторов, возникающих в фазовом пространстве при выполнении тех или иных параметрических ограничений/наборов. Это обстоятельство необходимо учитывать при решении задач аналитического синтеза динамики КА, в том числе для парирования его возможного хаотического поведения на разных этапах орбитального движения.

Литература к главе

1. Z.Elhadj, J.C. Sprott, Simplest 3D continuous-time quadratic systems as candidates for generating multiscroll chaotic attractors, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 23, No. 7 (2013).
2. J. Lü, G. Chen, A new chaotic system and beyond: the generalized Lorenz-like system, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 14, No. 5 (2004) 1507-1537.
3. A.V. Doroshin, Homoclinic solutions and motion chaotization in attitude dynamics of a multi-spin spacecraft, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 19, Issue 7 (2014), 2528–2552.
4. A.V. Doroshin, “Attitude Control of Spider-type Multiple-rotor Rigid Bodies Systems”, Proceedings of the World Congress on Engineering 2009, London, U.K. Vol II, pp.1544-1549.
5. A.V. Doroshin, Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors.

Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 16, Issue 8 (2011) 3188–3202.

6. Li, D. Q. A three-scroll chaotic attractor, *Phys.Lett. A* 372, (2008) 387–393.
7. Liu, W. B. & Chen, G. R. “Can a threedimensional smooth autonomous quadratic chaotic system generate a single four scroll attractor?” *Int.J. Bifurcation and Chaos* 14, (2004) 1395–1403.
8. Lü, J., Murali, K., Sinha, S., Leung, H. & Aziz-Alaoui, M. A. “Generating multi-scroll chaotic attractors by thresholding,” *Phys. Lett. A* 372, (2008) 3234–3239.
9. Qi, G. Y., Chen, G. R., van Wyk, M. A., van Wyk, B. J. & Zhang, Y. H. (2008) “A four-wing chaotic attractor generated from a new 3-D quadratic autonomous system,” *Chaos Solit. Fract.* 38, 705–721.
10. Wang, L. “3-scroll and 4-scroll chaotic attractors generated from a new 3-D quadratic autonomous system,” *Nonlin. Dyn.* 56, (2008) 453–462.
11. Wang, Z., Sun, Y., van Wyk, B. J., Qi, G. & van Wyk, M. A. “A 3-D four-wing attractor and its analysis,” *Brazilian J. Phys.* 39, (2009) 547–553.
12. Wang, X. & Chen, G. “Constructing a chaoticsystem with any number of equilibria,” *Nonlin. Dyn.* 71, (2012) 429–436.
13. Yu, S. M., Lu, J. H., Tang, W. K. S. & Chen, G. “A general multiscroll Lorenz system family and itsDSP realization,” *Chaos* 16 (2006), 033126-1–10.
14. Yu, S. M., Tang, W. K. S., Lü, J. & Chen, G. “Generation of $n \times m$ -wing Lorenz-like attractors from a modified Shimizu–Morioka model,” *IEEE Trans.Circuits Syst.-II* 55, (2008) 1168–1172.
15. Yu, S. M., Tang, W. K. S., Lü, J. & Chen, G. “Generating $2n$ -wing attractors from Lorenz-like systems,” *Int. J. Circuit Th. Appl.* 38, (2010) 243–258.
16. Yu, S., Lü, J., Chen, G. & Yu, X. “Design and implementation of grid multiwing butterfly chaoticattractors from a piecewise Lorenz system,” *IEEETrans. Circuits Syst.-II : Exp. Briefs* 57, (2010) 803–807.
17. Arneodo, A., Couillet, P. H., Spiegel, E. A. & Tresser, C. (1985) Asymptotic chaos," *Physica D* 14, 327-347.
18. Celikovsky, S. & Chen, G. (2002) On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems," *Int. J. Bifurcation and Chaos* 12, 1789-1812.
19. Chen, G. & Lai, D. (1998) Anticontrol of chaos via feedback, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 8, 1585-1590.
20. Chen HK, Lee CI, Anti-control of chaos in rigid body motion. *Chaos, Solitons & Fractals* 2004; 21: 957-65
21. Festa, R., Mazzino, A. & Vincenzi, D. (2002) Lorenz-like systems and classical dynamical equations with memory forcing: An alternate point of view for singling out the origin of chaos, *Phys. Rev. E* 65, 046205.

22. Linz, S. J. & Sprott, J. C. (1999) Elementary chaotic flow, Phys. Lett. A259, 240-245.
23. Liu, W. B. & Chen, G. (2003) A new chaotic system and its generation, Int. J. Bifurcation and Chaos 12, 261-267.
24. Lofaro, T. (1997) A model of the dynamics of the Newton-Leipnik attractor," Int. J. Bifurcation and Chaos 7, 2723-2733.
25. Lü, J. & Chen, G. [2002] A new chaotic attractor coined," Int. J. Bifurcation and Chaos 12, 659-661.
26. Lü, J., Chen, G., Cheng, D. & Celikovsk_y, S. [2002] Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system, Int. J. Bifurcation and Chaos 12, 2917-2926.
27. Lü, J., Chen, G. & Zhang, S. [2002] Dynamical analysis of a new chaotic attractor, Int. J. Bifurcation and Chaos 12, 1001-1015.
28. Sprott, J. C. [1994] Some simple chaotic flows, Phys. Rev. E50.
29. Sprott, J. C. [1997] Simplest dissipative chaotic flow, Phys. Lett. A228, 271-274.
30. A.V. Doroshin, Chaos and its avoidance in spinup dynamics of an axial dual-spin spacecraft. Acta Astronautica, Volume 94, Issue 2, February 2014, Pages 563-576.
31. Дорошин А.В. Хаотизация движения космического аппарата с двойным вращением в окрестности положения, стабилизированного частичной закруткой // «УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ» (УТС-2010) – Санкт- Петербург: ОАО «Концерн ЦНИИ ЭЛЕКТРОПРИБОР», 2010. 400с. С 341-344.
32. Дорошин А.В. Динамика пространственного движения спутника-гиростата при наличии малых полигармонических возмущений // «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012). – СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 119-122с.

IV. ВОЗМОЖНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ РОТОРОВ В ДИНАМИКЕ УГЛОВОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СИСТЕМОЙ СПАРЕННЫХ МАХОВИКОВ

В настоящей главе мы дадим некоторое авторское описание практического использования многороторных систем твердых тел, которые могут быть использованы для реализации угловой переориентации КА. Указанная подсистема основана на патенте (Патент на изобретение № 2403190 от 10.11.2010 – Дорошин А.В. «Многороторное гироскопическое устройство и способ управления пространственным положением космического аппарата»).

Широко известно, что для выполнения угловых переориентаций КА в настоящее время, в основном, используются такие известные гироскопические устройства (1. Алексеев К.Б. и др. Управление космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1974. 2. *Sidi M.J.* Spacecraft Dynamics & Control. Cambridge, 1997. 3. *P.W. Likins*, Spacecraft Attitude Dynamics and Control - A Personal Perspective on Early Developments, J. Guidance Control Dyn. Vol. 9, No.2, 1986. Pp.129-134. 4. *C.D. Hall*, Escape from gyrostat trap states, J. Guidance Control Dyn. 21, 1998. Pp.421-426. 5. *W.H. Steyn*, A dual-wheel multi-mode spacecraft actuator for near-minimum-time large angle slew maneuvers, Aerospace Science and Technology, Vol. 12, Issue 7, 2008. Pp.545-554.) для осуществления пространственной переориентации КА как *одностепенные гиростабилизаторы*, представляющие собой массивные роторы-маховики на внутренних раскручивающих двигателях (Momentum wheels), *двухстепенные гиростабилизаторы*, представляющие собой силовые гироскопы с двухстепенными кардановыми подвесами (гиродины, Control moment gyros), а также связки и системы указанных устройств.

Способ переориентации с помощью одностепенного гиростабилизатора основан на создании раскручивающего момента внутренним двигателем, раскручивающего ротор-маховик в одном направлении, при этом корпус КА раскручивается в противоположном направлении (1. Алексеев К.Б. и др. Управление космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1974. 2. *C.D. Hall*, Momentum Transfer Dynamics of a Gyrostat with a Discrete Damper, J. Guidance Control Dyn., Vol. 20, No.6, 1997. Pp.1072-1075.).

Способ переориентации с помощью двухстепенных гиростабилизаторов (гиродинов) основан на использовании гироскопических моментов, возникающих при отклонении рамок карданова подвеса силового гироскопа. В такой схеме переориентации имеет место «гироскопическое усиление» малых управляющих моментов (моментов сил отклонения рамок) за счет большой величины кинетического момента силового гироскопа, которую необходимо поддерживать. Обычно в КА используется несколько гиродинов и их спаренных систем для осуществления переориентаций по разным пространственным осям (1. Алексеев К.Б. и др. Управление космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1974. 2. W.H. Steyn, A dual-wheel multi-mode spacecraft actuator for near-minimum-time large angle slew maneuvers, Aerospace Science and Technology, Vol. 12, Issue 7, 2008. Pp.545-554. 3. US Patent 6154691 - Orienting a satellite with controlled momentum gyros).

Наиболее близким к предлагаемой системе по техническому существу является многороторное гироскопическое *устройство* представляющее собой систему одностепенных гиростабилизаторов – систему роторов-маховиков, приводимых во вращение внутренними двигателями, закрепленными на корпусе КА, включая известные конструкции спутника-гиростата и космических аппаратов с двойным вращением (1. C.D. Hall, Momentum Transfer Dynamics of a Gyrostat with a Discrete Damper, J. Guidance Control Dyn., Vol. 20, No.6, 1997. Pp.1072-1075. 2. K.J Kinsey, D. L. Mingori, R. H. Rand, Non-linear control of dual-spin spacecraft during despin through precession phase lock, J. Guidance Control Dyn. No.19, 1996. Pp.60-67.).

Наиболее близким *способом* переориентации является переориентация по схеме одностепенного гиростабилизатора, когда создание угловой скорости корпуса обеспечивается приведением ротора-маховика во вращение в противоположном направлении за счет включения внутреннего раскручивающего двигателя (1. Алексеев К.Б. и др. Управление космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1974. 2. C.D. Hall, Momentum Transfer Dynamics of a Gyrostat with a Discrete Damper, J. Guidance Control Dyn., Vol. 20, No.6, 1997. Pp.1072-1075.).

Основной задачей является уменьшение энергозатрат, обеспечение безинерционности и быстродействия выполнения маневров переориентации, отказе от постоянной поддержки больших угловых скоростей вращений роторов, независимости от нелинейности характеристик раскручивающих двигателей.

Указанная задача решается за счет того, что во многороторном гироскопическом устройстве, содержащем роторы, вращающиеся на осях, закрепленных в корпусе космического аппарата, оси вращения роторов размещаются на корпусе КА центрально-симметричным образом и образуют некомпланарное множество противонаправленных пар, при этом роторы располагаются на осях также центрально-симметричным образом и для каждого ротора существует свой симметричный сопряженный ротор с эквивалентными инерционно-массовыми параметрами, причем каждый ротор размещен на отдельном раскручивающем его внутреннем двигателе, закрепленном на корпусе КА.

Задача решается также за счет того, что в способе управления пространственным положением космического аппарата, включающем раскрутку роторов, согласно изобретению, роторы раскручивают сопряженными парами синхронно в противоположных направлениях до достижения определенных угловых скоростей, после чего осуществляется мгновенный захват-торможение одного из пары сопряженных роторов, при этом возникает угловая скорость переориентации корпуса КА с поворотом его на требуемый угол, после чего производят мгновенный захват-торможение парного сопряженного ротора и корпус КА останавливается.

Способ также подразумевает выполнение раскруток одной, нескольких или всех имеющихся пар сопряженных роторов, а также сложную последовательность захватов-торможений роторов для выполнения сложной программы переориентаций корпуса КА.

Многороторное устройство, изображенное на фиг.4.1, состоит из центрального тела-корпуса КА (схематически изображено, как тело № 0) и шести ортогональных попарно противонаправленных осей-лучей, являющимися осями вращения роторов. Система выполнена по центрально-симметричной схеме. Роторы размещаются на осях так, чтобы для каждого из них существует центрально-симметричный закрепленный на противоположном луче эквивалентный по инерционно-массовым свойствам ротор, который будем называть «сопряженным» (так, например, роторы 12 и 22 – сопряженные, пары роторов $\{3N$ и $4N\}$, $\{51$ и $61\}$ также являются сопряженными). Нумерация роторов выполнена так, что первая цифра двузначного номера означает номер луча, а вторая – номер слоя сопряженных роторов. Направление лучей: 1 – по связанной оси x , 2 – противоположно связанной оси x , 3 – по связанной оси y , 4 – противоположно связанной оси y , 5 – по связанной оси z , 6 – противоположно связанной оси z .

Номер слоя роторов определяет близость ротора к центральному телу-корпусу: самый близкий к корпусу ротор имеет номер слоя 1, следующий по удалению от корпуса ротор того же луча – номер 2 и т.д. Номер ротора II означает его расположение на луче номер I и в слое номер J . Каждый ротор может иметь относительную угловую скорость (по отношению к корпусу КА) вращения вокруг своей оси, которая меняется в соответствии с приложенным к нему моментом сил раскручивающего двигателя, закрепленного на корпусе КА. Каждый ротор на собственном раскручивающем двигателе представляет собой отдельный одностепенный гиросtabilизатор. Таким образом, предлагаемое многороторное гироскопическое устройство представляет собой систему, состоящую из множества пар сопряженных противонаправленных одностепенных гиросtabilизаторов.

На фиг.4.2 схематично изображен частный вид предыдущей схемы (фиг.4.1). Так имеет место центральное тело-корпус КА и шесть ортогональных попарно противонаправленных лучей и один слой роторов. В связи с тем, что слой является единственным нумерация роторов осуществляется одной цифрой, описывающей только номер направления луча. Таким образом, имеется три пары сопряженных роторов: $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$.

Способ управления пространственным положением КА включает следующую последовательность действий.

1. Синхронная раскрутка какой-либо пары сопряженных роторов в противоположных направлениях под действием одинаковых по величине моментов сил внутренних раскручивающих двигателей.

2. Захват одного из роторов сопряженной пары для создания угловой скорости переориентации корпуса КА. После выполнения захвата ротора корпус приобретает некоторую расчетную угловую скорость и выполняет требуемую угловую переориентацию.

3. Захват второго ротора сопряженной пары для мгновенной остановки корпуса КА.

Отметим следующие возможности предложенного способа, отличающие его от известных способов:

- Пункты 1-3 последовательности действий по предлагаемому способу переориентации могут быть выполнены для любой одной пары сопряженных

роторов, нескольких пар или для всех пар сопряженных роторов.

- Захваты роторов могут быть одновременными или могут выполняться в разные моменты времени для отдельных роторов.

- Переориентация КА по предложенной схеме может быть осуществлена из состояния абсолютного покоя с нулевым кинетическим моментом системы. Такая схема переориентации будет происходить без возникновения усиливающих гироскопических моментов и может быть охарактеризована как развитие схемы одностепенного гиросtabilизатора, которая не зависит от нелинейностей характеристик двигателей и является безинерционной и существенно более быстродействующей.

- Переориентация КА по предложенной схеме может быть осуществлена из состояния с ненулевым кинетическим моментом системы. В этом случае будут возникать гироскопические моменты сил, которые могут использоваться для усиления эффектов переориентации, дающих возможности использования меньших величин угловых скоростей корпуса КА инициирующихся за счет сопряженных раскруток и захватов. Присутствие гироскопического момента в этом случае подобно гироскопическому усилению в двухстепенных гиросtabilизаторах (гиродинах), что является одним из достоинств предлагаемой многороторной системы переориентации.

- Многороторные системы (фиг. 4.1 и 4.2), обладающие большим количеством пар сопряженных роторов и пар лучей с сопряженными роторами могут осуществлять сложные программные переориентации за счет сложных последовательностей захватов. Также подобные системы допускают формирование «заряда» для последующих переориентаций, что подразумевает сопряженную раскрутку всех имеющихся пар сопряженных роторов (что никак не влияет на динамику корпуса КА), а дальнейшая переориентация (в том числе сложная программа переориентаций) выполняется позднее по мере необходимости.

Далее приведем результаты расчетов динамики движения систем, подтверждающие вышеизложенный способ осуществления пространственной переориентации КА.

Для иллюстрации возможности использования системы сопряженных роторов для выполнения пространственных переориентаций КА, представленной на фиг.4.2. Кинетический момент системы в проекциях на оси связанной с телом-корпусом КА системы координат Ox_{yz} равен

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_r \quad (91)$$

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \tilde{A}p \\ \tilde{B}q \\ \tilde{C}r \end{bmatrix} + (4J + 2I) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_r = I \begin{bmatrix} \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_3 + \sigma_4 \\ \sigma_5 + \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (92)$$

где \mathbf{K}_m - кинетический тела-корпуса вместе с «замороженными» в нем роторами; \mathbf{K}_r - относительный кинетический момент роторов, $\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^T$ - абсолютная угловая скорость основного тела-корпуса, σ_i - относительная угловая скорость ротора i по отношению к основному телу. $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ - главные моменты инерции основного тела корпуса; I - продольный момент инерции ротора; J - экваториальный момент инерции ротора, вычисленный относительно точки O .

Уравнения движения запишутся на основе теоремы об изменении кинетического момента (в подвижной системе координат $Oxyz$) в следующем виде

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}^e \quad (93)$$

где \mathbf{M}^e - момент внешних сил. Скалярный вид векторного уравнения (93) представляет собой систему следующих уравнений

$$\begin{cases} A\dot{p} + I\dot{\sigma}^{12} + (C - B)qr + I(q\sigma^{56} - r\sigma^{34}) = M_x^e \\ B\dot{q} + I\dot{\sigma}^{34} + (A - C)pr + I(r\sigma^{12} - p\sigma^{56}) = M_y^e \\ C\dot{r} + I\dot{\sigma}^{56} + (B - A)pq + I(p\sigma^{34} - q\sigma^{12}) = M_z^e \end{cases} \quad (94)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \sigma_i + \sigma_j, & A &= \tilde{A} + 4J + 2I \\ B &= \tilde{B} + 4J + 2I, & C &= \tilde{C} + 4J + 2I \end{aligned} \quad (95)$$

Уравнения относительного движения роторов имеют вид, записанный также

на основе теоремы об изменении кинетического момента

$$\begin{cases} I(\dot{p} + \dot{\sigma}_1) = M_1^i + M_{1x}^e; & I(\dot{p} + \dot{\sigma}_2) = M_2^i + M_{2x}^e \\ I(\dot{q} + \dot{\sigma}_3) = M_3^i + M_{3y}^e; & I(\dot{q} + \dot{\sigma}_4) = M_4^i + M_{4y}^e \\ I(\dot{r} + \dot{\sigma}_5) = M_5^i + M_{5z}^e; & I(\dot{r} + \dot{\sigma}_6) = M_6^i + M_{6z}^e \end{cases} \quad (96)$$

где M_j^i - момент внутренних сил, действующих со стороны основного тела на ротор j ; $M_{jx}^e, M_{jy}^e, M_{jz}^e$ - моменты внешних сил, отдельно действующих на ротор j . Уравнения (94) и (96) полностью описывают динамику многороторной системы (фиг. 4.2).

Для определения углового положения тела носителя будем использовать известные параметры Родрига-Гамильтона (в зарубежной литературе указываются как параметры Эйлера) $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, которые определяют конечный поворот основного тела на угол χ вокруг некоторой оси в пространстве, сопадающей с направлением единичного вектора $\mathbf{e} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]^T$ в инерциальной системе координат $OXYZ$ изначально совпадающей с начальным положением связанной системы $Oxyz$ (фиг. 4.4).

Как известно, параметры Родрига-Гамильтона могут быть определены следующими соотношениями, связывающими угол конечного поворота и направляющие косинусы оси поворота

$$\begin{cases} \lambda_0 = \cos \frac{\chi}{2}; & \lambda_1 = \cos \alpha \sin \frac{\chi}{2} \\ \lambda_2 = \cos \beta \sin \frac{\chi}{2}; & \lambda_3 = \cos \gamma \sin \frac{\chi}{2} \end{cases} \quad (97)$$

Кинематическая система уравнений в параметрах Родрига-Гамильтона имеет известный вид

$$2\dot{\lambda} = \Theta \cdot \lambda \quad (98)$$

где

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \quad (99)$$

Рассмотрим теперь схему алгоритма переориентации с нулевым начальным кинетическим моментом. Дадим несколько определений, суммирующих и повторяющих описанные выше действия, выполняемые в рамках заявленного способа переориентации.

«Сопряженными роторами» будем называть роторы на противоположных лучах, расположенные симметрично относительно основного тела, например, это роторы 3 и 4 (фиг.4.2), роторы 52 и 62 (фиг.4.1) и т.д.

«Сопряженной раскруткой» будем называть раскрутку сопряженных роторов внутренними моментами (внутренними раскручивающими двигателями) в разных направлениях равными по модулю и различными по знаку моментами внутренних сил. Раскрутка происходит до того момента как сопряженные роторы приобретают заданные угловые скорости, равные по модулю и противоположные по направлению (по знаку).

«Захватом ротора» будем называть мгновенное (быстропротекающее) торможение относительной угловой скорости ротора до нулевого значения. Захват может быть осуществлен, например, за счет мгновенного сцепления ротора и основного тела-корпуса (шестереночными и подобными зацеплениями), либо за счет формирования («включения») сильного трения (сухого или вязкого) в подшипнике вращения ротора на собственной оси. Таким образом, захват ротора подразумевает его мгновенную (быструю) остановку по отношению к основному телу-корпусу.

Рассмотрим принцип переориентации КА посредством сопряженных раскруток и последовательных захватов роторов при условиях отсутствия внешних сил ($M_x^e = M_y^e = M_z^e = 0$) и начального кинетического момента системы (КА с роторами) в следующем «модельном» случае:

$$p(0) = q(0) = r(0) = 0; \quad \forall i: \sigma_i(0) = 0 \quad (100)$$

$$A = B = C = D \quad (101)$$

В простейшем случае можно использовать кусочно-постоянные внутренние моменты сил для сопряженной раскрутки роторов. Рассмотрим сопряженную раскрутку сопряженных роторов 1 и 2 (фиг. 4.2) следующими внутренними моментами

$$M_1^i = \begin{cases} M_{12}, & \text{if } t \in [0, t_{12}^s] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$M_2^i = \begin{cases} -M_{12}, & \text{if } t \in [0, t_{12}^s] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (102)$$

где t_{12}^s время раскрутки (длительность) роторов 1 и 2; $M_{12} = \text{const} > 0$.

После сопряженной раскрутки роторы 1 и 2 достигают величины $S_{12} = M_{12} \cdot t_{12}^s / I$ относительной угловой скорости ($\sigma_1 = S_{12}$, $\sigma_2 = -S_{12}$) причем основное тело-корпус остается в абсолютном покое, как и ранее. После сопряженной закрутки в момент времени t_1^c ($t_1^c > t_{12}^s$) захватывается ротор 1. После захвата ротора 1 он теряет относительную угловую скорость ($\sigma_1' = 0$), а основное тело-корпус приобретает угловую скорость p в направлении луча сопряженных роторов (в данном случае ось Ox), а ротор 2 меняет величину относительной угловой скорости на σ_2' . Эти величины могут быть вычислены из условия сохранения кинетического момента системы

$$Ap + I\sigma_2' = 0 \quad (103)$$

Условие сохранения кинетического момента ротора 2 приводит к выражению

$$I(p + \sigma_2') = -IS_{12} \quad (104)$$

Из последних соотношений следуют величины угловых скоростей

$$p = \frac{IS_{12}}{A - I}; \quad \sigma_2' = -\frac{AS_{12}}{A - I} \quad (105)$$

Далее в момент времени t_2^c ($t_2^c > t_1^c$) выполняется захват ротора 2 и после этого, согласно условию сохранения кинетического момента, все тела системы (основное тело-корпус и роторы 1, 2) получают нулевые значения угловых скоростей и, таким образом, снова переходят в абсолютный покой.

Следовательно, в процессе сопряженной раскрутки роторов 1, 2 и последовательных их захватов обеспечивается кусочно-постоянная угловая скорость тела-корпуса КА в направлении оси Ox

$$P = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1^c) \cup (t_2^c, \infty) \\ P = \frac{IS_{12}}{A - I}, & t \in [t_1^c, t_2^c] \end{cases} \quad (106)$$

Тело-корпус осуществляет угловую переориентацию вокруг оси Ox на угол

$$\varphi_x = \frac{IS_{12}(t_2^c - t_1^c)}{A - I} \quad (107)$$

Аналогично за счет сопряженных закруток и последовательных захватов сопряженных роторов можно обеспечить кусочно-постоянные угловые скорости тела-корпуса КА по другим осям, например для компоненты скорости по оси Oy можно получить следующие величины

$$q = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_3^c) \cup (t_4^c, \infty) \\ Q = \frac{IS_{34}}{B - I}, & t \in [t_3^c, t_4^c] \end{cases} \quad (108)$$

$$\sigma'_4 = -\frac{BS_{34}}{B - I}; \quad S_{34} = \frac{M_{34} \cdot t_{34}^s}{I}$$

где t_{ij}^s - моменты времен (длительности) раскрутки сопряженных роторов i и j ; t_i^c - момент времени захвата ротора i ; M_{ij} - абсолютное значение внутреннего момента сил раскрутки сопряженных роторов i и j ; S_{ij} - абсолютное значение относительной угловой скорости сопряженных роторов i и j после сопряженной раскрутки; σ'_i - величина относительной угловой скорости ротора i после захвата его сопряженного ротора i^*

Несложно показать, что при отсутствии внешних сил и нулевом начальном кинетическом моменте системы проекции кинетического момента на неподвижные оси системы координат $OXYZ$ и на связанные оси системы координат $Oxyz$ будут тождественно нулевые

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^e = 0 &\Rightarrow \mathbf{K}_{OXYZ} = \mathbf{const} \\
\mathbf{K}_{OXYZ} &= [K_X, K_Y, K_Z]^T \\
\mathbf{K}_{Oxyz} &= [K_x, K_y, K_z]^T \\
\mathbf{K}_{OXYZ}(0) &= \mathbf{0} \Rightarrow \\
K_X = K_Y = K_Z &= K_x = K_y = K_z = 0 \\
\dot{\mathbf{K}}_{Oxyz} &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_{Oxyz} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \\
K_x \equiv K_y \equiv K_z &\equiv 0 \quad (\forall A, B, C)
\end{aligned} \tag{109}$$

Следовательно, в процессах сопряженных раскруток и последовательных захватов сопряженных роторов будут иметь место кусочно-постоянные величины угловой скорости тела-корпуса

$$p = \begin{cases} P \\ 0 \end{cases}; \quad q = \begin{cases} Q \\ 0 \end{cases}; \quad r = \begin{cases} R \\ 0 \end{cases} \tag{110}$$

Пусть моменты времени сопряженных захватов системы (фиг.4.1) одинаковы для каждой сопряженной пары $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, а также имеет место начальное совпадение неподвижной и связанной систем координат

$$\begin{aligned}
t_1^c = t_3^c = t_5^c &= t_{start}^c; \quad t_2^c = t_4^c = t_6^c = t_{finish}^c \\
\lambda_0(t_{start}^c) &= 1; \quad \lambda_1(t_{start}^c) = \lambda_2(t_{start}^c) = \lambda_3(t_{start}^c) = 0
\end{aligned} \tag{111}$$

В этом случае кинематические уравнения (98) имеют следующие аналитические решения

$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) &= \cos \frac{\Omega \cdot (t - t_{start}^c)}{2}; \quad \lambda_1(t) = \frac{P}{\Omega} \sin \frac{\Omega \cdot (t - t_{start}^c)}{2} \\
\lambda_2(t) &= \frac{Q}{\Omega} \sin \frac{\Omega \cdot (t - t_{start}^c)}{2}; \quad \lambda_3(t) = \frac{R}{\Omega} \sin \frac{\Omega \cdot (t - t_{start}^c)}{2} \\
\Omega &= \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}; \quad t \in [t_{start}^c, t_{finish}^c]; \quad T = t_{finish}^c - t_{start}^c
\end{aligned} \tag{112}$$

Решения (112) демонстрируют, что в момент времени t_{finish}^c основное тело-корпус КА выполнило конечный поворот вокруг единичного вектора \mathbf{e} на угол χ (Фиг.4.4)

$$\mathbf{e} = \left[\cos \alpha = \frac{P}{\Omega}, \cos \beta = \frac{Q}{\Omega}, \cos \gamma = \frac{R}{\Omega} \right]^T \quad (113)$$

$$\chi = \Omega T$$

Таким образом, решения (112) показывают возможность осуществления пространственной переориентации КА на любой заданный вектор конечного поворота. Требуемое направление и величина конечного поворота обеспечивается сопряженными раскрутками роторов до требуемых относительных угловых скоростей и временными параметрами выполнения захватов роторов. Рассмотренный процесс переориентации при нулевом значении кинетического момента подобен процессу переориентации с помощью одностепенного гиросtabilизатора (корпус-маховик), но не зависит от нелинейностей характеристик раскручивающего внутреннего двигателя и, безусловно, имеет более выгодные энергетические характеристики. Так сопряженную раскрутку можно осуществлять произвольными величинами моментов раскручивающих внутренних двигателей, например, малыми моментами на продолжительном интервале времени, что позволяет постепенно «накопить» требуемые относительные угловые скорости сопряженных роторов для дальнейших переориентаций с помощью их сопряженных захватов.

В случае ненулевой начальной величины кинетического момента будут иметь место ненулевые гироскопические члены в динамических уравнениях (94) и переменные компоненты кинетического момента в связанных осях (в неподвижных осях конечно же вектор кинетического момента постоянен)

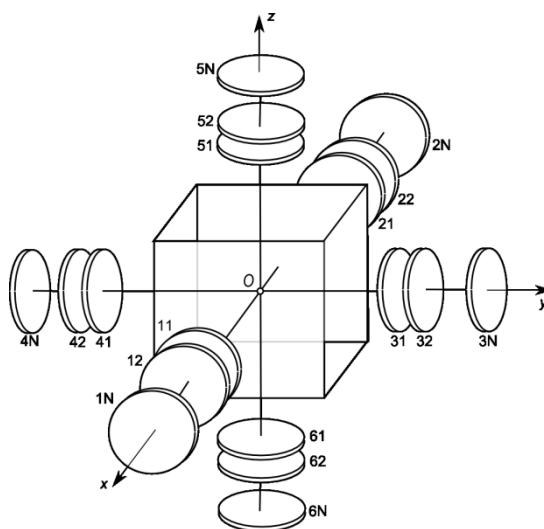
$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{OXYZ} &= \text{const} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{Oxyz}(0) &\neq \mathbf{0}, \quad \omega(t_i^c \leq t \leq t_{i*}^c) \neq \mathbf{0} \Rightarrow \\ \dot{\mathbf{K}}_{Oxyz} &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_{Oxyz} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \\ K_{x,y,z} &= \text{var}(t) \end{aligned} \quad (114)$$

В этом случае имеется гироскопическое усиление процессов переориентации, подобное гироскопическим моментам в системах двухстепенных гиросtabilизаторов (гиродинов). Процессы переориентации в этом случае имеют более сложные алгоритмы с учетом переменности угловых скоростей тела-корпуса во времени. Тем не менее, схема переориентации на основе сопряженных раскруток и захватов остается действенной и эффективной. Оптимизация алгоритмов и процессов переориентации в этом случае представляет собой научную и инженерно-расчетную задачу.

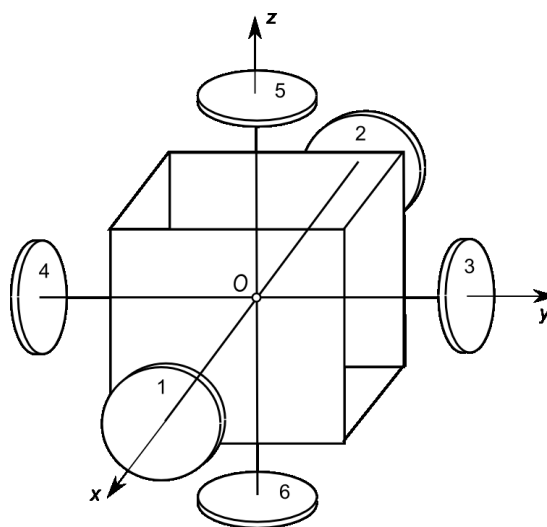
Многороторные системы, представленные на фиг.4.1, 4.3 имеют большое количество пар сопряженных роторов и также лучей с сопряженными роторами, поэтому могут подразумевать сложные последовательности сопряженных раскруток и захватов для осуществления сложных программ переориентаций КА в пространстве.

Таким образом, рассмотренное многороторное гироскопическое устройство, содержащее роторы, вращающиеся на осях, закрепленных в корпусе космического аппарата, отличающееся тем, что оси размещены на корпусе центрально-симметричным образом и образуют некомпланарное множество противонаправленных пар, при этом роторы расположены на осях также центрально-симметричным образом и для каждого ротора существует свой симметричный сопряженный ротор с эквивалентными инерционно-массовыми параметрами, причем каждый ротор размещен на отдельном раскручивающем его внутреннем двигателе, закрепленном на корпусе КА, а роторы каждой сопряженной пары имеют одинаковые внутренние двигатели.

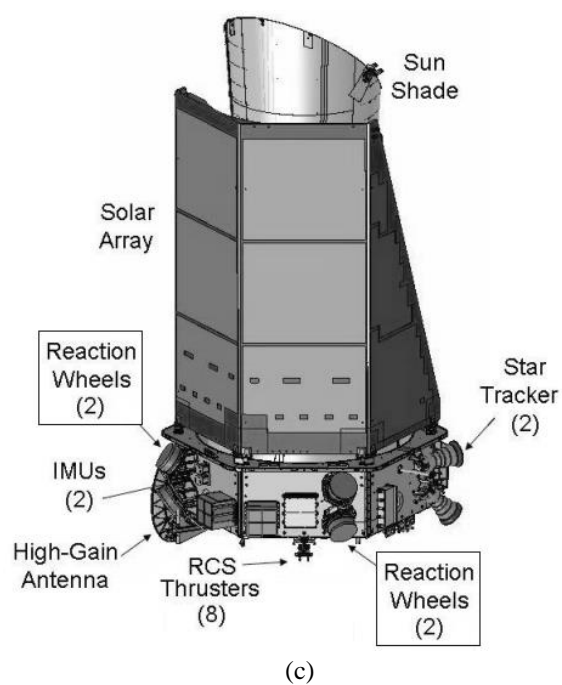
Способ управления пространственным положением космического аппарата включает раскрутку роторов, которые раскручивают сопряженными парами синхронно в противоположных направлениях до достижения определенных угловых скоростей, дальнейшее осуществление мгновенного/быстрого (также возможно медленного – что представляет собой отдельный дополнительный интерес) захвата-торможения одного из пары сопряженных роторов (для создания угловой скорости переориентации корпуса КА с поворотом его на требуемый угол), и сопряженный захват-торможение парного сопряженного ротора для остановки корпуса КА.



Фиг. 4.1



Фиг. 4.2

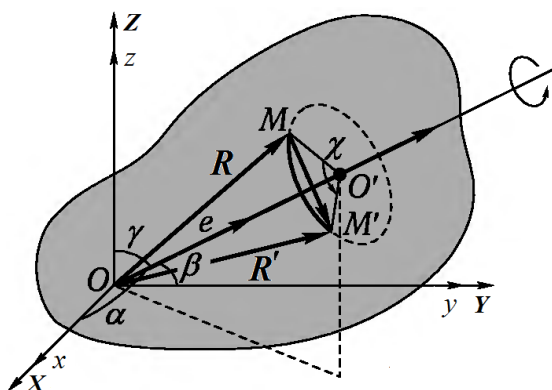


(c)



(d)

Фиг.4.3. Пример многоторного КА – «Kepler»



Фиг. 4.4

Таким образом, описанная многороторная подсистема относится к гироскопическим системам управления пространственным (угловым) положением космических аппаратов и/или их подсистем:

устройство представляет собой динамически симметричную систему твердых тел-роторов, вращающихся на множестве осей, симметрично закрепленных в корпусе космического аппарата (КА). Роторы располагаются на осях центрально-симметричным образом, для каждого ротора существует свой симметричный сопряженный ротор с эквивалентными инерционно-массовыми параметрами.

Изменение пространственной ориентации КА осуществляется в соответствии с законом сохранения кинетического момента за счет синхронных раскруток сопряженных роторов в противоположных направлениях и выполнения последовательности мгновенных (быстро протекающих) остановок-захватов одиночных роторов с помощью зацеплений с корпусом или посредством создания больших сил трения в осях.

Техническим результатом является: мгновенное создание и снятие абсолютной угловой скорости пространственной переориентации корпуса КА; выполнение произвольного заданного конечного поворота с заданной скоростью маневра переориентации; отказ от постоянной поддержки больших угловых скоростей вращений роторов и больших моментов сил раскручивающих двигателей; отсутствие зависимости от нелинейности характеристик раскручивающих двигателей; возможность медленной раскрутки роторов за счет малых моментов сил и снижение энергозатрат.