

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = A \sin \omega t$$

$$\varphi_0 = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t ;$$

$$\varphi(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

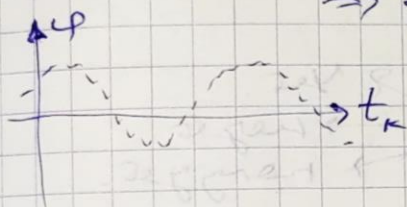
$$\begin{aligned} \varphi &= B \sin \omega t \\ \dot{\varphi} &= B \omega \cos \omega t \\ \ddot{\varphi} &= -B \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (1) \quad \begin{aligned} -B \omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 B \sin \omega t &= A \sin \omega t \\ B &= A / (\omega_0^2 - \omega^2) \end{aligned}$$

Добавьте к найденным решениям только в моменты $\boxed{\omega t_k = \pi k}$

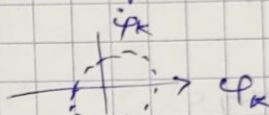
$$t_k = \frac{\pi k}{\omega} \leadsto \varphi(t_k) = C_1 \sin \omega_0 t_k + C_2 \cos \omega_0 t_k + 0 \quad (2)$$

$\omega \gg 1 \Rightarrow \frac{\pi}{\omega} \ll 1 \Rightarrow t_k = h \cdot k$, где $h = \pi/\omega$ — малый шаг

Т.е. если строить решение (2) с этим малым шагом $\Rightarrow$ так и строить на компьютерах ВСЕ решения.



$\varphi(t_k), \dot{\varphi}(t_k)$



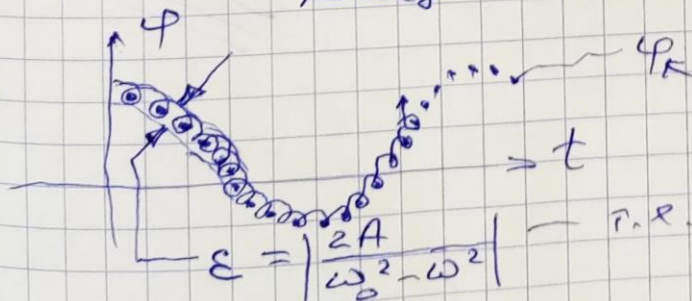
Если строить для $k \rightarrow \infty$ (т.е. долго) $\Rightarrow$ линия $\vec{r}(t)$ залезает и танцует эллипсом.

Это идея Пуанкаре

$\rightarrow$ сечение Пуанкаре.

Что между шагами? как там ведет себя наблюдаемое решение?

Там будет маленькая сфера вокруг каждой точки на сечении Пуанкаре:



т.е. тонкий "обогащенный слой" жирная кривая.

Поэтому можно в целом понять динамику не во всем фаз. пространстве $(x, \dot{x}, t) \in \mathbb{R}^3$,

а уже по его сечению Пуанкаре в $\mathbb{R}^2$

а уже по его сечению Пуанкаре в $\mathbb{R}^2$ и уже по его сечению Пуанкаре в $\mathbb{R}^2$ как отображению по времени.

Этот вид сечения как отображение по времени.

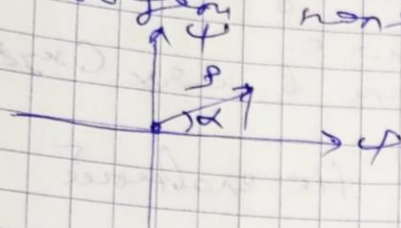
Особые множества: точки покоя и аттракторы

В 2D-и $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \rightarrow \dot{\varphi} = \psi \rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = -\omega_0^2 \varphi \end{cases}$

Если ввести единичную точку (0,0) введем функцию:

$\ddot{\varphi} + \nu \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = -\nu \psi - \omega_0^2 \varphi \end{cases}$ тоже точка (0,0)

В 2D-и введем непрерывно с.к. : (ρ, α)



$\varphi = \rho \cos \alpha; \quad \psi = \rho \sin \alpha$

(1) $\dot{\varphi} = \dot{\rho} \cos \alpha - \rho \dot{\alpha} \sin \alpha$

(2) $\dot{\psi} = \dot{\rho} \sin \alpha + \rho \dot{\alpha} \cos \alpha$

$\dot{\rho} = ?$
 $\dot{\alpha} = ?$

(1) $\cos \alpha + (2) \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} \cos \alpha + \dot{\psi} \sin \alpha = \dot{\rho} \Rightarrow \\ \begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = -\nu \psi - \omega_0^2 \varphi \end{cases} \end{cases}$

$\dot{\rho} = \dot{\varphi} \cos \alpha + \dot{\psi} \sin \alpha = \psi \cos \alpha + (-\nu \psi - \omega_0^2 \varphi) \sin \alpha =$
 $= \rho \sin \alpha \cdot \cos \alpha + (-\nu \rho \sin \alpha - \omega_0^2 \rho \cos \alpha) \sin \alpha =$
 $= \rho(1 - \omega_0^2) \cos \alpha \sin \alpha - \nu \rho \sin^2 \alpha$

$\dot{\alpha} = ? \quad \dot{\varphi} \sin \alpha - \dot{\psi} \cos \alpha = -\rho \dot{\alpha} \Rightarrow$
(1) $\sin \alpha - (2) \cos \alpha$

$-\rho \dot{\alpha} = \psi \sin \alpha - (-\nu \psi - \omega_0^2 \varphi) \cos \alpha = \rho \sin^2 \alpha + \nu \rho \sin \alpha \cos \alpha + \omega_0^2 \rho \cos^2 \alpha$
 $= \rho(\sin^2 \alpha + \nu \cos \alpha \sin \alpha + \omega_0^2 \cos^2 \alpha)$

Пусть мы перейдем к новым единицам времени и угла в которых $\omega_0 = 1 \Rightarrow$

$\begin{cases} \dot{\rho} = -\nu \rho \sin^2 \alpha \\ \dot{\alpha} = -1 - \frac{\nu \cos \alpha \sin \alpha}{1/2 \sin 2\alpha} \end{cases} \quad (*)$
 $= -1 - \frac{\nu}{2} \sin 2\alpha < 0$ всегда

Если $\nu = 0$:
 $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \text{const}$
 $\dot{\alpha} = -1 \Rightarrow \alpha = -1t + \alpha_0$



Если $\nu \neq 0, \nu > 0 \Rightarrow$

$\dot{\rho} = -\nu \rho \sin^2 \alpha < 0 \Rightarrow \rho \downarrow$

$\alpha = -t - \int \dots dt$

$\dot{\alpha} < 1$ всегда
Рокке



Предельный цикл:

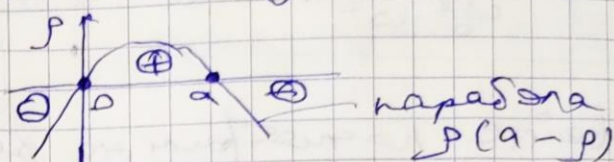
$$\begin{cases} \dot{r} = r(a-r) \\ \dot{\alpha} = \omega \end{cases}$$

$r = \text{const}$ когда?

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r(a-r) = 0 \Rightarrow \text{два значения!}$$

$$r_1 = 0; r_2 = a$$

а какие знаки были у $\dot{r}$



$r = a$
предельный цикл

Какие особые множества известны из нашего материала

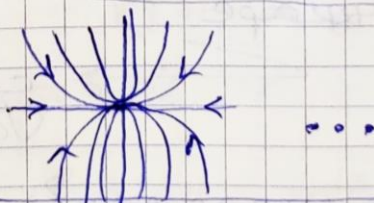
⊙ центр

✕ сепар

⊙ фокус
↙ yes ↘ нет

⊙ - ПЦ
↗ yes
→ нет
↘ неуст.

Еще бывают узлы:



Теперь есть фазовые портреты
особые множества
сегменты Пуанкаре.

инструменты
анализа динамики.