Устойчивость, ее линейный анализ, ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА

$\dot x = F(x, a)$ (*) — параметры

Устойчивость некоторого реш-я $\bar x$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|x_0 - \bar x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar x(t)\| < \varepsilon.$$

Матрица линеаризации:

Пусть y - малые отклонения от $\bar x$,

т.е. $y(t) = x(t) - \bar x(t)$

$$\{x(t) = y(t) + \bar x(t)\} \longrightarrow (*):$$

$$\dot y + \dot{\bar x} = F(y(t) + \bar x(t))$$

$$\boxed{\dot y = F(y + \bar x) - F(\bar x)} = \mathcal{F}(y, t)$$

y - малые $\Rightarrow$ линеаризация:

$$\dot y = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right]\Bigg|_0 \cdot y \xrightarrow[\text{ряд по } y]{} \dot y = A(t) \cdot y \quad :$$

$$a_{ij}(t) = \frac{\partial \mathcal{F}_i(y, t)}{\partial y_j}\Bigg|_{y=0}$$

⇒ По Ляпунову ⇒

Итак, $\dot{y} = A(t)\cdot y$ ← линеариз. система в окр. $x(t)$

У матрицы $A(t)$ есть свои собств. числа и вектора, т.е.:

$$A(t)\cdot\bar{e} = \rho(t)\,\bar{e}$$

$$[A(t)-\rho(t)E]\cdot\bar{e} = 0 \quad (**)$$

$$\det[A(t)-\rho(t)E] = 0 \longrightarrow \rho(t)$$

$$\rho(t) \rightsquigarrow (**) \Rightarrow \bar{e} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$$

$$\rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3 \ldots$$

Вдоль i-го собств. вектора решение меняется экспоненциально:

$$z_i = z_i(t_0)\exp[(t-t_0)\rho_i], \text{ где}$$

$$\boxed{z_i = y(t)\cdot\bar{e}_i}$$

это покажем

Можно оценить устойчивость поведения решения вдоль собственного вектора путем вычисления числа λ_i:

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-t_0}\ln\left\|\frac{z_i(t)}{z_i(t_0)}\right\|$$ — это показатель Ляпунова, их столько же, сколько и собственных векторов/чисел.

1). После линеаризации имеем систему

$$\dot{y} = A(t)\cdot y \quad (***)$$ (в окрестности исходного решения $\bar{x} = \bar{x}(t)$).

$[A(t) - \rho(t)E]\cdot\bar{e} = 0$ — задача на собств. вектора и значения матрицы $A(t)_{n\times n}$

$\Rightarrow$ Следует набор n штук $\{\lambda_i, \bar{e}_i\}$, причем:

$$\forall i: [A(t) - \rho_i(t)E]\cdot\bar{e}_i = 0 \Rightarrow \boxed{A(t)\cdot\bar{e}_i = \rho_i(t)E\cdot\bar{e}_i} \quad (****)$$

Выберем какой-то собств. вектор $\bar{e}_i$. Если вычислить $y(t)\cdot\bar{e}_i(t)$, то мы получим проекцию вектора отклонений $y(t)$ на направление $\bar{e}_i$ — т.е. это отклонение решений вдоль $\bar{e}_i$:

$$z_i = y(t)\cdot\bar{e}_i(t)$$

Найдем $\dot{z}_i$: $\dot{z}_i = \dot{y}\cdot\bar{e}_i + \underbrace{y\cdot\dot{\bar{e}}_i}_{\text{поворот базиса}}$

Если смотреть на очень малом временном отрезке, то можно отбросить влияние поворота самого вектора (базиса) $\bar{e}_i(t)$. $\Rightarrow$

$$\dot{z}_i \cong \dot{y}(t)\cdot\bar{e}_i = (***) = \overbrace{A(t)\cdot y}^{\dot{y}}\cdot\bar{e}_i =$$

$$= \underbrace{A(t)\cdot\bar{e}_i}\cdot y = (****) = \underbrace{\rho_i(t)E\cdot\bar{e}_i}\cdot y = \rho_i(t)\bar{e}_i\cdot y =$$

$$= \rho_i(t)\, z_i(t). \quad \text{Т.е.} \quad \boxed{\dot{z}_i \cong \rho_i(t)\, z_i(t)} \Rightarrow \int_{z_i(t_0)}^{z_i}\frac{dz_i}{z_i} = \int_{t_0}^{t}\rho_i\, dt$$

$$z_i(t) = z_i(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\rho_i(t)\,dt\right].$$

$$\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t-t_0} \ln\left|\frac{z_i(t)}{z_i(t_0)}\right|$$

Нашли, что $\ln\frac{z_i(t)}{z_i(t_0)} = \int_{t_0}^{t} \rho_i(t)\,dt$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \rho_i(t)\,dt} \quad (****)$$

т.е. показатель Ляпунова равен осредненной величине собственного числа матрицы линеаризации (он зависит от t).

У естественных систем $\in \mathbb{R}^n$

$\dot{y} = A(t)y$ будет n штук $\rho_i, \bar{e}_i$,

причем они должны быть обычными числами и векторами,

т.е. ВЕЩЕСТВЕННЫМИ.

Для обобщения м/формулу $(****)$ записать:

$$\boxed{\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \underline{Re}(\rho_i(t))\,dt}$$

Есть важное свойство:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} \operatorname{div} F(\tau)\, d\tau$$

Т.е. сумма показателей показывает эволюцию фазового объема системы вдоль исследуемого решения.

Есть ли стоки или источники? Есть ли "убыль" / "накачка" вещества, энергии вдоль решения.

Для диссипативных систем $\Rightarrow$

$$\sum \lambda_i < 0$$

Для консервативных

$$\sum \lambda_i = 0$$

(Для экситотивных $\sum \lambda_i > 0$).

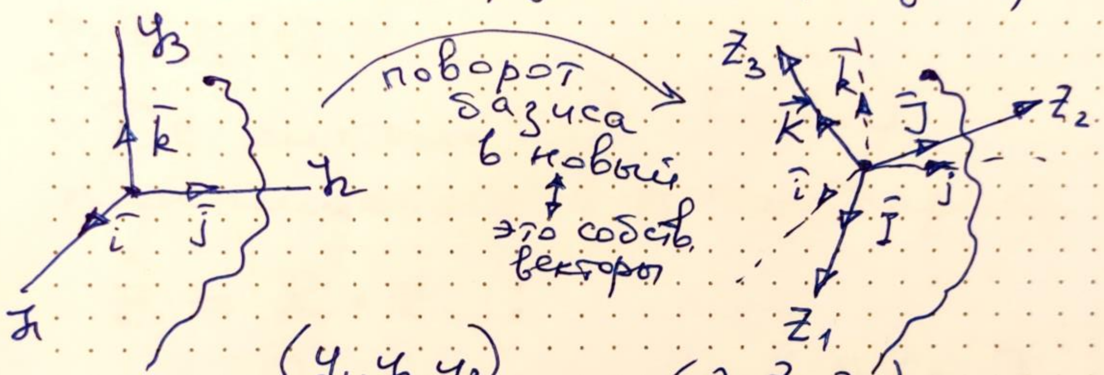
По показателям Л. оцениваются важные фазовые свойства решения.

(об этом далее | потом)

Еще раз:

$\dot{y} = A(t) \cdot y$;

$\hookrightarrow$ если найдены собственные вектора и числа матрицы A, то формально можно перейти в новые координаты (базис)



(y_1, y_2, y_3) $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ $\longrightarrow$ (z_1, z_2, z_3) в new базисе $\{\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}\}$ собств. вект. (отнормир.)

Тогда матрица A в новом базисе перезапишется в диагональн. форме, где на диагональ встанут собственные числа.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & - - - & - - & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \longrightarrow R$$

$A \longrightarrow$ в новый базис $\longrightarrow R$:

$$R = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \rho_n \end{bmatrix}$$

$\rho_i = \rho_i(t)$

Т.е. система $\dot{y} = A(t) \cdot y$ перепишется в новом базисе :

$\dot{z} = R \cdot z$:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & & \emptyset \\ & \rho_2 & \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \rho_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \rho_1(t) z_1 ; \\ \dot{z}_2 = \rho_2(t) z_2 ; \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \rho_n(t) z_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dot{z}_i = \rho_i(t) z_i} \Rightarrow$$

$$\boxed{z_i = z_i(0) \exp(\rho_i \cdot t)}$$ если $\rho_i = const$

$$\boxed{\frac{z_i(t)}{z_i(0)} = e^{\rho_i t}}$$

$\hookrightarrow \ln \frac{z_i}{z_0} = \rho_i t$

СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ САМАРСКОЙ ОБЛАСТИ

$\dot{z}_i = \rho_i(t) z_i$ $\rho_i = var(t) = \rho_i(t)$

$\frac{dz_i}{dt} = \rho_i(t) z_i \longrightarrow \frac{dz_i}{z_i} = \rho_i(t) dt$

$\Rightarrow \boxed{\ln z_i \Big|_{z_i(0)}^{z_i} = \int_0^t \rho(t) dt \quad t_0 = 0}$

$$z_i(t) = z_i(0) \exp\left[\int_0^t \rho(t) dt\right]$$

Компонент $z_i(t)$ малого возмущения растёт экспоненциально.

Если принять идею, что в процессе динамики $z_i(t)$ "выходит" на некий экспоненциальный темп, когда $\rho_i \to \bar{\rho}_i$:

$$\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t - \underset{\downarrow}{t_0}} \ln \frac{z_i(t)}{z_i(0)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \rho_i \, dt$$

0

λ_i – показатель Ляпунова.

Пр. Если $\rho_i = const \Rightarrow$

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \rho_i \, dt =$$

$$= \lim \frac{1}{[t-t_0]} \cdot \rho_i \cdot [t-t_0] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \rho_i = \rho_i$$

Т.е. по смыслу показатель Ляпунова — это осредненное собственное значение

$$\boxed{\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \rho_i(t)\, dt}$$.