

2.4. Необходимое и достаточное условие уменьшения амплитуды нутационных колебаний

Как уже было показано, для уменьшения амплитуды колебаний по углу нутации необходимо и достаточно того, чтобы величины μ и ω имели одинаковые знаки. При этом, чем большие значения по величине принимает параметр μ , тем более быстро происходит затухание нутационных колебаний. Опираясь на это основное условие, можно получить критерий для дальнейшей минимизации амплитуды нутационных колебаний, согласно которому можно определить оптимум в пространстве инерционно-массовых параметров. Оптимум представляет собой точку в пространстве проектных параметров, для которой обеспечивается наибольшее и наиболее быстрое затухание нутационных колебаний. Указанный критерий оптимальности можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} \mu = \operatorname{sgn} \omega, \\ |\mu| \rightarrow \sup. \end{cases} \quad (2.55)$$

В случае, когда реализуется стабилизация продольной оси КА с помощью частичной закрутки, т.е. когда $r_0 = 0$, для μ и ω выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{-\sigma_0}{2T(A_1 + A_2)^2} \left[\Delta_A \cdot C_1 - \Delta_C \cdot (A_1 + A_2) \right], \\ \omega &= \frac{-C_1 \sigma_0}{A_1 + A_2}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

где

$$\Delta_A = A_1 - A_{1,k}, \quad \Delta_C = C_1 - C_{1,k}.$$

С учетом (2.56) критерий (2.55) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta_A \cdot C_1 > \Delta_C \cdot (A_1 + A_2), \\ \Delta_A \cdot C_1 - \Delta_C \cdot (A_1 + A_2) \rightarrow \sup_{\{\Delta_A, \Delta_C\}}. \end{cases} \quad (2.57)$$

Величины $\{\Delta_A, \Delta_C\}$ образуют в рассматриваемой задаче пространство проектных параметров, в котором, согласно (2.57), выбирается наиболее подходящая точка. Подобные подходы могут встречаться в других задачах поиска наилучших и в определенных смыслах оптимальных решений и управляющих величин при аналитическом проектировании разнообразных механических систем.

При получении критерия (2.57) было опущено то обстоятельство, что чем большие значения принимает скорость относительной закрутки σ_0 , тем более эффективной является стабилизация и тем меньшие амплитуды имеют нутационные колебания. Следовательно, возможное увеличение величины σ_0 считается очевидным и не является предметом оптимизации, длительность работы двигательной установки T также не варьируется.

Опираясь на критерий (2.57) и принимая во внимание то, что управляющие величины Δ_A, Δ_C существенно положительны в рассматриваемой задаче, в качестве необходимого и достаточного условия уменьшения амплитуды нутационных колебаний можно записать [3]:

$$\frac{\Delta_A}{A_1 + A_2} > \frac{\Delta_C}{C_1}. \quad (2.58)$$

Оптимальными величинами Δ_A^*, Δ_C^* будут являться такие величины из подмножества проектных параметров P^* (рис. 11), при которых $\Delta_A / (A_1 + A_2) - \Delta_C / C_1 \rightarrow \sup_{\{\Delta_A, \Delta_C\}}$.

Подмножество P^* проектных параметров, для которых амплитуда нутационных колебаний не увеличивается, представлено для некоторой

гипотетической области гипотетически возможных проектных параметров (рис. 11) в пространстве $\{\Delta_A, \Delta_C\}$, располагающихся выше прямой:

$$\Delta_A = k \cdot \Delta_C, \quad (2.59)$$

где $k = (A_1 + A_2)/C_1$.

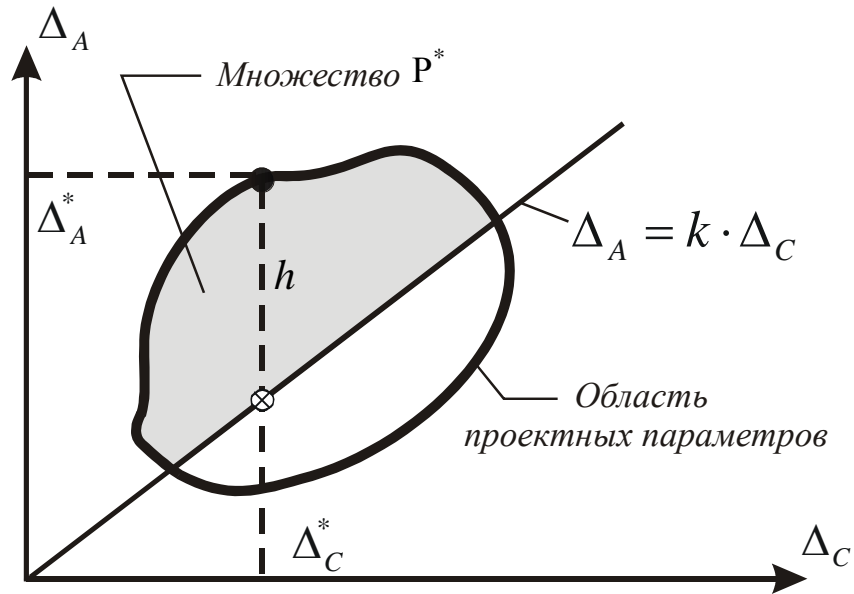


Рис. 11. Выбор оптимальных значений из множества P^* , обеспечивающих наименьшую амплитуду нутационных колебаний

Оптимальными величинами Δ_A^* , Δ_C^* будут являться те величины, лежащие на границе множества P^* , которые имеют наибольшее удаление h от прямой (2.59) по оси Δ_A . Выбор оптимальных величин определяется конфигурацией множества возможных проектных параметров. Невыполнение условия (2.58) приводит к росту амплитуды колебаний по углу нутации и, следовательно, к увеличению рассеивания точек посадки.

Таким образом, получены аналитические зависимости параметров ориентации КА с двойным вращением на активном участке траектории спуска, выражаемые через интегралы Френеля, а также найдено необходимое

и достаточное условие, накладываемое на инерционно-массовые параметры, обеспечивающее уменьшение амплитуды нутационных колебаний, что, в свою очередь, уменьшает рассеивание точек посадки аппарата.

3. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС КА С ДВОЙНЫМ ВРАЩЕНИЕМ НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ СПУСКА

В предыдущих главах было проведено исследование пространственного движения КА с двойным вращением вокруг полюса, совпадающего с начальным положением центра масс аппарата. Оставим в силе предположение о малом относительном смещении центра масс вследствие выгорания топлива, принятого ранее для получения зависимостей от времени параметров ориентации. Для оценки эффективности стабилизации частичной закруткой достаточно рассмотреть движение центра масс КА с двойным вращением.

3.1. Уравнения движения центра масс спускаемого аппарата

Рассмотрим движение относительно некоторой инерциальной системы координат центра масс КА с двойным вращением на активном участке траектории спуска. Активный участок характеризуется сравнительно короткой длительностью работы тормозной двигательной установки ($T \sim 15-25$ с.), и поэтому путь КА, пройденный на активном участке, будет относительно небольшим. В этом случае движение можно рассматривать как движение в плоском поле тяготения [45], пренебрегая вращением Земли, и взять некоторое среднее значение ускорения свободного падения на высоте орбиты (для высот $100 \div 200$ км от поверхности Земли $g \approx 9,51$ м/с² [30]).

Пусть указанная система координат $OXYZ$ движется в абсолютном пространстве прямолинейно с постоянной скоростью V_{orb} , соответствующей непродолжительному участку орбитального движения КА. Выберем следующее расположение осей системы. Оси OZ и OY лежат в плоскости орбиты, причем положение OZ соответствует расчетному направлению

выдачи тормозного импульса, а ось OX перпендикулярна орбитальной плоскости и образует с перечисленными осями правую систему (рис. 12).

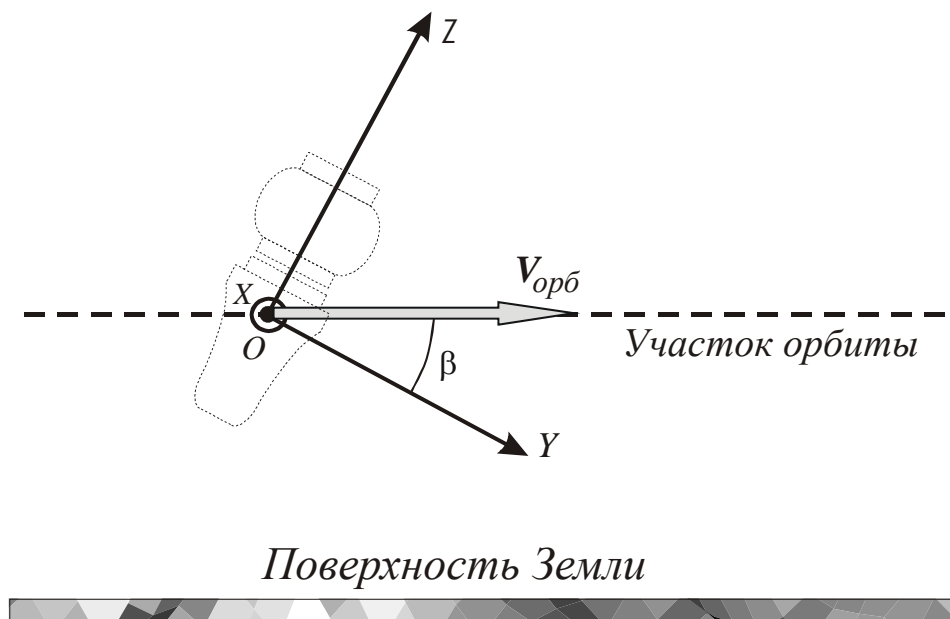


Рис. 12. Движение и ориентация инерциальной системы координат $OXYZ$

В предыдущей главе определены параметры ориентации КА относительно центра масс (рис. 3) в случае свободного углового движения. В силу малых размеров аппарата и малых относительных смещений его центра масс можно использовать полученные решения для углов ориентации (2.48)-(2.53) при рассмотрении пространственного движения КА вокруг центра масс и движения центра масс в плоском поле силы тяжести на активном участке спуска.

По-прежнему будем считать, что вектор тормозной тяги направлен вдоль продольной оси КА, линейные и угловые эксцентриситеты тяги отсутствуют, а изменение массы происходит по линейному закону, что соответствует постоянной силе реактивной тяги ($P = 1400 \text{ H}$):

$$m(t) = m_0(1 - \alpha \cdot t), \quad (3.1)$$

где $\alpha = \frac{m_0 - m_k}{m_0 T}$ - удельный секундный расход топлива [37] в тормозной двигательной установке.

Запишем уравнения движения центра масс КА в проекциях на инерциальные оси $OXYZ$:

$$\begin{cases} m(t)\ddot{X} = -P \sin \gamma , \\ m(t)\ddot{Y} = G \sin \beta + P \sin \psi \cos \gamma , \\ m(t)\ddot{Z} = -G \cos \beta - P \cos \psi \cos \gamma , \end{cases} \quad (3.2)$$

где $G = m(t)g$ - сила тяжести, P - постоянная сила реактивной тяги, а β - заданный угол выдачи тормозного импульса к направлению движения вдоль орбиты ($\beta \sim 35 \div 45^\circ$).

3.2. Приближенные аналитические зависимости для параметров движения центра масс КА

Получим приближенное решение системы (3.2), принимая в качестве зависимостей для углов ориентации приближенные зависимости (2.53), в которых величина τ рассматривалась как постоянный параметр. Так как для рассматриваемой задачи характерны малые значения удельного расхода массы ($\alpha \sim 0,01 \text{ кг/с}$), то величину $\alpha \cdot t = \lambda$ можно также положить в качестве параметра, взяв ее среднее значение $\bar{\lambda} = \alpha T/2$. Поэтому для массы КА можно принять ее постоянное среднее значение: $m = m_0(1 - \bar{\lambda})$.

Учитывая последние допущения, систему (3.2) можно переписать:

$$\begin{cases} \dot{V}_X = \frac{-P}{m} \sin(-R \cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma), \\ \dot{V}_Y = g \sin \beta + \frac{P}{m} \sin(R \sin[\Omega t + s_0] + f_\psi) \cos(-R \cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma), \\ \dot{V}_Z = -g \cos \beta - \frac{P}{m} \cos(R \sin[\Omega t + s_0] + f_\psi) \cos(-R \cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma), \end{cases} \quad (3.3)$$

где $R = \frac{L_0}{\omega + \tau}$, $\Omega = \omega + \tau$, $f_\gamma = \gamma_0 - R \cos s_0$, $f_\psi = \psi_0 - R \sin s_0$,

$$V_X = \dot{X}, \quad V_Y = \dot{Y}, \quad V_Z = \dot{Z}. \quad (3.4)$$

Уравнения системы (3.3) можно интегрировать отдельно. При этом, как будет показано, их интегралы запишутся в цилиндрических функциях Бесселя, Ангера, Вебера и Струве [54].

Найдем интеграл первого уравнения (3.3).

$$\begin{aligned}
V_{xk} - V_{x0} &= -\int_0^T \frac{P}{m} \sin(-R \cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma) dt = \\
&= \frac{P}{m} \int_0^T [\sin(R \cos[\Omega t + s_0]) \cos f_\gamma - \cos(R \cos[\Omega t + s_0]) \sin f_\gamma] dt = \\
&= \frac{P}{m} (i_1 \cos f_\gamma - i_2 \sin f_\gamma),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned}
i_1 &= \int_0^T \sin(R \cos[\Omega t + s_0]) dt = \frac{1}{\Omega} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sin(R \cos \xi) d\xi = \\
&= \frac{1}{\Omega} \int_0^{\xi_1} \sin(R \cos \xi) d\xi - \frac{1}{\Omega} \int_0^{\xi_0} \sin(R \cos \xi) d\xi = \\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2\Omega} [H_0(\xi_1, R) - H_0(\xi_0, R)],
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
i_2 &= \int_0^T \cos(R \cos[\Omega t + s_0]) dt = \frac{1}{\Omega} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \cos(R \cos \xi) d\xi = \\
&= \frac{1}{\Omega} \int_0^{\xi_1} \cos(R \cos \xi) d\xi - \frac{1}{\Omega} \int_0^{\xi_0} \cos(R \cos \xi) d\xi = \\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2\Omega} [I_0(\xi_1, R) - I_0(\xi_0, R)],
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\xi_0 = s_0, \quad \xi_1 = \Omega T + s_0.$$

Здесь $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ – полная гамма-функция, а

$$H_0(x, y) = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_0^x \sin(y \cos \xi) d\xi, \quad I_0(x, y) = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_0^x \cos(y \cos \xi) d\xi -$$

неполные нулевого порядка функции Струве и Бесселя соответственно [54];

при $x = \pi/2$ они будут называться полными функциями Струве и Бесселя или

просто функциями Струве и Бесселя. Для решения второго уравнения (3.3) вычислим следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \sin(R \sin[\Omega t + s_0] + f_\psi) \cos(-R \cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma) dt = \\
& = \int_0^T \left\{ \left[\sin(R \sin[\Omega t + s_0]) \cos f_\psi + \cos(R \sin[\Omega t + s_0]) \sin f_\psi \right] \times \right. \\
& \times \left. \left[\cos(-R \cos[\Omega t + s_0]) \cos f_\gamma + \sin(R \cos[\Omega t + s_0]) \sin f_\gamma \right] \right\} dt = \\
& = i_I \cos f_\psi \cos f_\gamma + i_{II} \cos f_\psi \sin f_\gamma + \\
& \quad + i_{III} \sin f_\psi \cos f_\gamma + i_{IV} \sin f_\psi \sin f_\gamma,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$\begin{aligned}
i_I &= \int_0^T \sin(R \sin[\Omega t + s_0]) \cos(-R \cos[\Omega t + s_0]) dt, \\
i_{II} &= \int_0^T \sin(R \sin[\Omega t + s_0]) \sin(R \cos[\Omega t + s_0]) dt, \\
i_{III} &= \int_0^T \cos(R \sin[\Omega t + s_0]) \cos(-R \cos[\Omega t + s_0]) dt, \\
i_{IV} &= \int_0^T \cos(R \sin[\Omega t + s_0]) \sin(R \cos[\Omega t + s_0]) dt.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Вычислим каждый из интегралов (3.9).

$$i_I = \frac{1}{2} (i'_I + i''_I), \quad i_{II} = \frac{1}{2} (i'_{II} - i''_{II}), \quad i_{III} = \frac{1}{2} (i'_{III} + i''_{III}), \quad i_{IV} = \frac{1}{2} (i'_I - i''_I), \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned}
i'_I &= \int_0^T \sin(R \sin[\Omega t + s_0] + R \cos[\Omega t + s_0]) dt, \quad i''_I = \int_0^T \sin(R \sin[\Omega t + s_0] - R \cos[\Omega t + s_0]) dt, \\
i'_{II} &= \int_0^T \cos(R \sin[\Omega t + s_0] - R \cos[\Omega t + s_0]) dt, \quad i''_{II} = \int_0^T \cos(R \sin[\Omega t + s_0] + R \cos[\Omega t + s_0]) dt.
\end{aligned}$$

Найдем штрихованные величины:

$$\begin{aligned}
i'_I &= \int_0^T \sin \left(R \sin [\Omega t + s_0] + R \sin \left[\frac{\pi}{2} - \Omega t - s_0 \right] \right) dt = \int_0^T \sin \left(2R \sin \frac{\pi}{4} \cos [\Omega t + s_0 - \frac{\pi}{4}] \right) dt = \\
&= \frac{1}{\Omega} \left[\int_0^{\xi_3} \sin (R' \cos \xi) d\xi - \int_0^{\xi_2} \sin (R' \cos \xi) d\xi \right] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \sqrt{\pi}}{2 \Omega} [H_0(\xi_3, R') - H_0(\xi_2, R')], \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i''_I &= \int_0^T \sin \left(R \sin [\Omega t + s_0] - R \sin \left[\frac{\pi}{2} - \Omega t - s_0 \right] \right) dt = \int_0^T \sin \left(2R \cos \frac{\pi}{4} \sin [\Omega t + s_0 - \frac{\pi}{4}] \right) dt = \\
&= \frac{1}{\Omega} \left[\int_0^{\xi_3} \sin (R' \sin \xi) d\xi - \int_0^{\xi_2} \sin (R' \sin \xi) d\xi \right] = \frac{\pi}{\Omega} [E_0(\xi_2, R') - E_0(\xi_3, R')], \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i''_II &= \int_0^T \cos \left(R \sin [\Omega t + s_0] - R \sin \left[\frac{\pi}{2} - \Omega t - s_0 \right] \right) dt = \int_0^T \cos \left(2R \cos \frac{\pi}{4} \sin [\Omega t + s_0 - \frac{\pi}{4}] \right) dt = \\
&= \frac{1}{\Omega} \left[\int_0^{\xi_3} \cos (R' \sin \xi) d\xi - \int_0^{\xi_2} \cos (R' \sin \xi) d\xi \right] = \frac{\pi}{\Omega} [J_0(\xi_2, R') - J_0(\xi_3, R')], \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i''_{II} &= \int_0^T \cos \left(R \sin [\Omega t + s_0] + R \sin \left[\frac{\pi}{2} - \Omega t - s_0 \right] \right) dt = \int_0^T \cos \left(2R \sin \frac{\pi}{4} \cos [\Omega t + s_0 - \frac{\pi}{4}] \right) dt = \\
&= \frac{1}{\Omega} \left[\int_0^{\xi_3} \cos (R' \cos \xi) d\xi - \int_0^{\xi_2} \cos (R' \cos \xi) d\xi \right] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \sqrt{\pi}}{2 \Omega} [I_0(\xi_3, R') - I_0(\xi_2, R')], \quad (3.14)
\end{aligned}$$

где $\xi_3 = \Omega T + s_0 - \pi/4$, $\xi_2 = s_0 - \pi/4$, $R' = R\sqrt{2}$,

$E_0(x, y) = \frac{-1}{\pi} \int_0^x \sin(y \sin t) dt$, $J_0(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \cos(y \sin t) dt$ - неполные нулевого

порядка функции Вебера и Ангера соответственно; при $x = \pi/2$ они будут называться полными функциями Вебера и Ангера или просто функциями Вебера и Ангера [54].

Теперь можно записать решение для второго уравнения (3.3):

$$\begin{aligned}
V_{Yk} - V_{Y0} &= Tg \sin \beta + \frac{P}{m} \left(i_I \cos f_\psi \cos f_\gamma + i_{II} \cos f_\psi \sin f_\gamma + \right. \\
&\quad \left. + i_{III} \sin f_\psi \cos f_\gamma + i_{IV} \sin f_\psi \sin f_\gamma \right). \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Для поиска квадратуры третьего уравнения (3.3), вычислим интеграл:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \cos(R \sin[\Omega t + s_0] + f_\psi) \cos(-R \cos[\Omega t + s_0] + f_\gamma) dt = \\
 & = \int_0^T \left\{ \left[\cos(R \sin[\Omega t + s_0]) \cos f_\psi - \sin(R \sin[\Omega t + s_0]) \sin f_\psi \right] \times \right. \\
 & \times \left. \left[\cos(-R \cos[\Omega t + s_0]) \cos f_\gamma + \sin(R \cos[\Omega t + s_0]) \sin f_\gamma \right] \right\} dt = \\
 & = i_{III} \cos f_\psi \cos f_\gamma + i_{IV} \cos f_\psi \sin f_\gamma - \\
 & \quad - i_I \sin f_\psi \cos f_\gamma - i_{II} \sin f_\psi \sin f_\gamma .
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Решение для третьего уравнения (3.3) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 V_{zk} - V_{z0} = -Tg \cos \beta + \frac{P}{m} \left(i_{III} \cos f_\psi \cos f_\gamma + i_{IV} \cos f_\psi \sin f_\gamma - \right. \\
 \left. - i_I \sin f_\psi \cos f_\gamma - i_{II} \sin f_\psi \sin f_\gamma \right) .
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Так как выбранная инерциальная система координат $OXYZ$ движется со скоростью, соответствующей скорости движения КА по орбите на момент включения тормозной двигательной установки, то в решениях (3.5), (3.15) и (3.17) начальные значения скоростей следует положить равными нулю:

$$V_{x0} = V_{y0} = V_{z0} = 0 . \tag{3.18}$$

3.3. Оценка эффективности стабилизации КА частичной закруткой

Решения (3.5), (3.15) и (3.17) позволяют проводить оценку эффективности стабилизации продольной оси частичной закруткой. В практической деятельности используются следующие две оценки эффективности стабилизации [7]:

$$\Pi_1 = \frac{\sqrt{V_{Xk}^2 + V_{Yk}^2}}{|\vec{V}_k|} \leq \bar{\Pi}_1, \quad \Pi_2 = \frac{|\vec{V}_n - \vec{V}_k|}{|\vec{V}_n|} \cdot 100\% \leq \bar{\Pi}_2, \quad (3.19)$$

где $|\vec{V}_k| = \sqrt{V_{Xk}^2 + V_{Yk}^2 + V_{Zk}^2}$ - величина скорости центра масс КА в конце работы тормозной двигательной установки, а

$$|\vec{V}_n| = \int_0^T |\vec{R}| dt = \frac{T}{m} \sqrt{G^2 + 2gP \cos \beta + P^2} \quad - \text{номинальное значение конечной}$$

скорости центра масс КА, вычисляемое через импульс равнодействующей от сил реактивной тяги и тяжести при отсутствии нутационных колебаний.

Первая оценка (3.19) характеризует угловую ошибку Π_1 в выдаче тормозного импульса, а вторая – относительную ошибку Π_2 по величине в приращении скорости центра масс. При этом значения ошибок Π_1 и Π_2 в оценках (3.19) сравниваются с их некоторыми допустимыми величинами $\bar{\Pi}_1$ и $\bar{\Pi}_2$, которые определяются требованиями к величине рассеивания точек посадки КА и являются заданными.

Вообще говоря, при более точных расчетах целесообразно определять величину номинальной скорости с учетом переменности массы КА:

$$V_{Xn} = 0, \quad V_{Yn} = Tg \sin \beta,$$

$$V_{Zn} = -Tg \cos \beta - \frac{P}{m_0} \int_0^T \frac{dt}{1 - \alpha t} = -Tg \cos \beta + \frac{P}{\alpha m_0} \ln |1 - \alpha T|,$$

$$V_n = \sqrt{(Tg \sin \beta)^2 + \left(-Tg \cos \beta + \frac{P}{\alpha m_0} \ln|1 - \alpha T| \right)^2}. \quad (3.20)$$

В заключение приведем результаты численных расчетов для некоторой гипотетической области проектных параметров (рис. 13), из которой выделено подмножество P^* (рис. 14, 15). Проведен расчет (рис. 14) максимальных значений углов нутации по формулам (2.54); выделены значения, соответствующие точкам подмножества P^* и оптимальным величинам Δ_A^* , Δ_C^* .

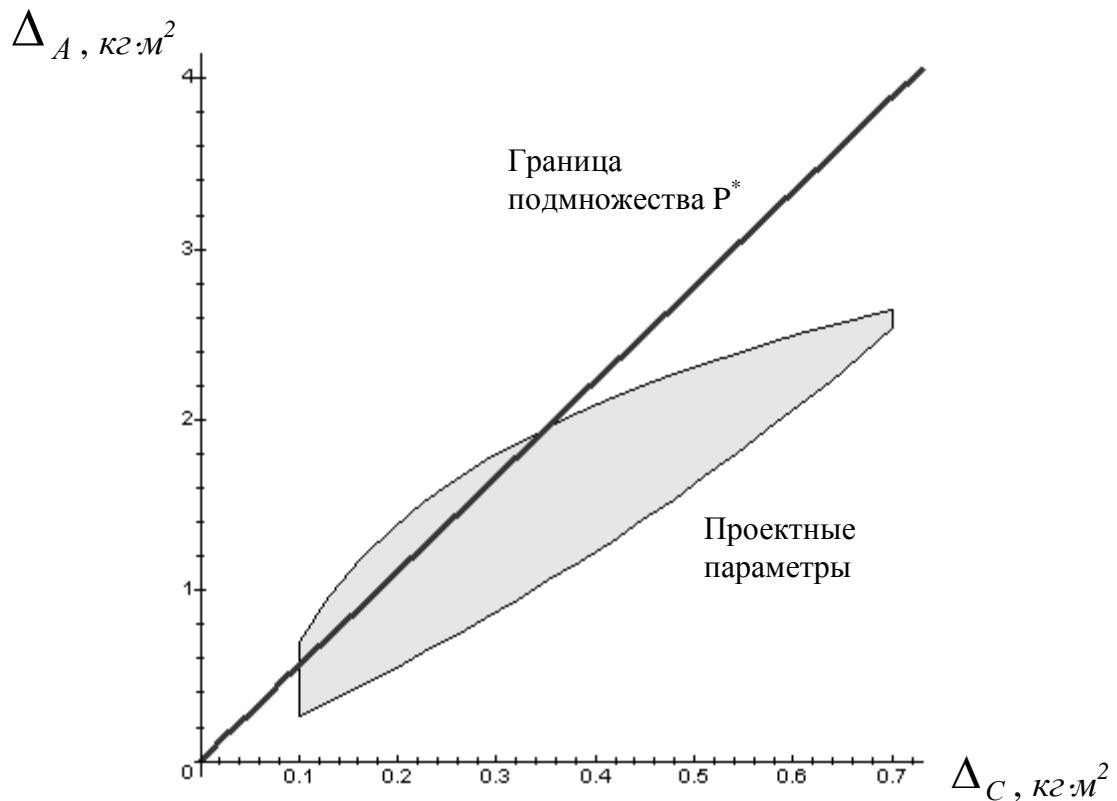


Рис. 13. Область возможных проектных параметров

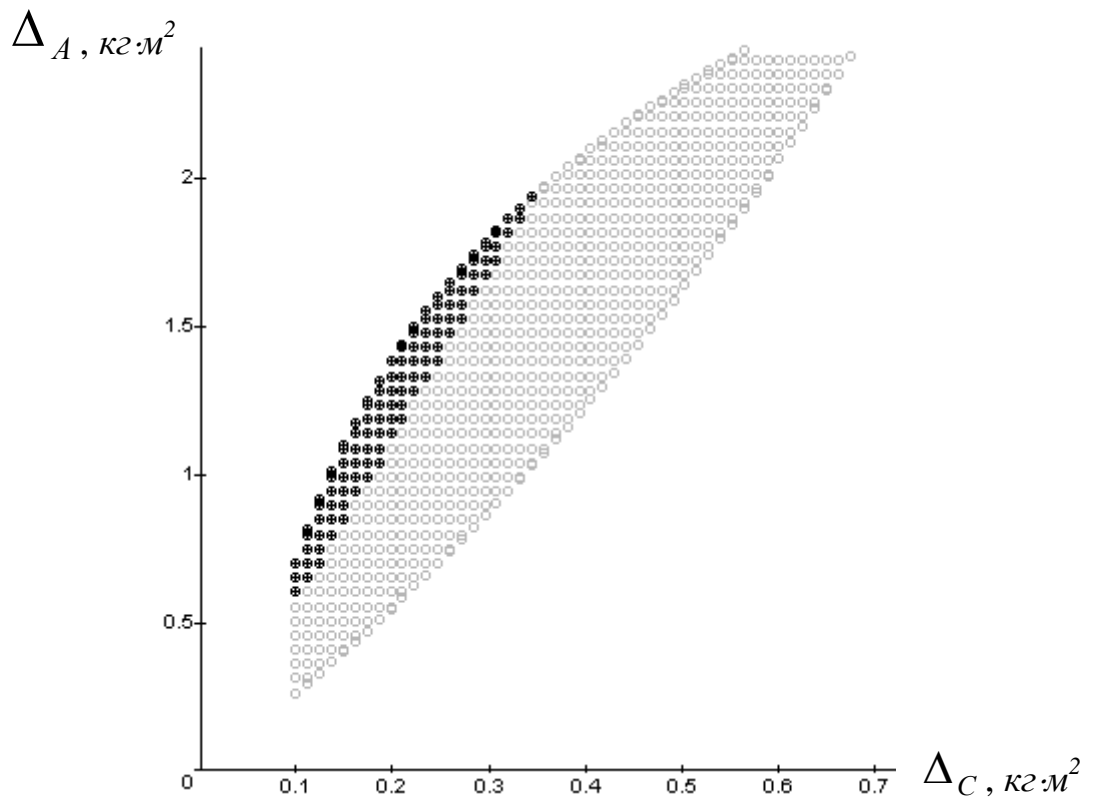


Рис. 14. Подмножество P^* в пространстве проектных параметров

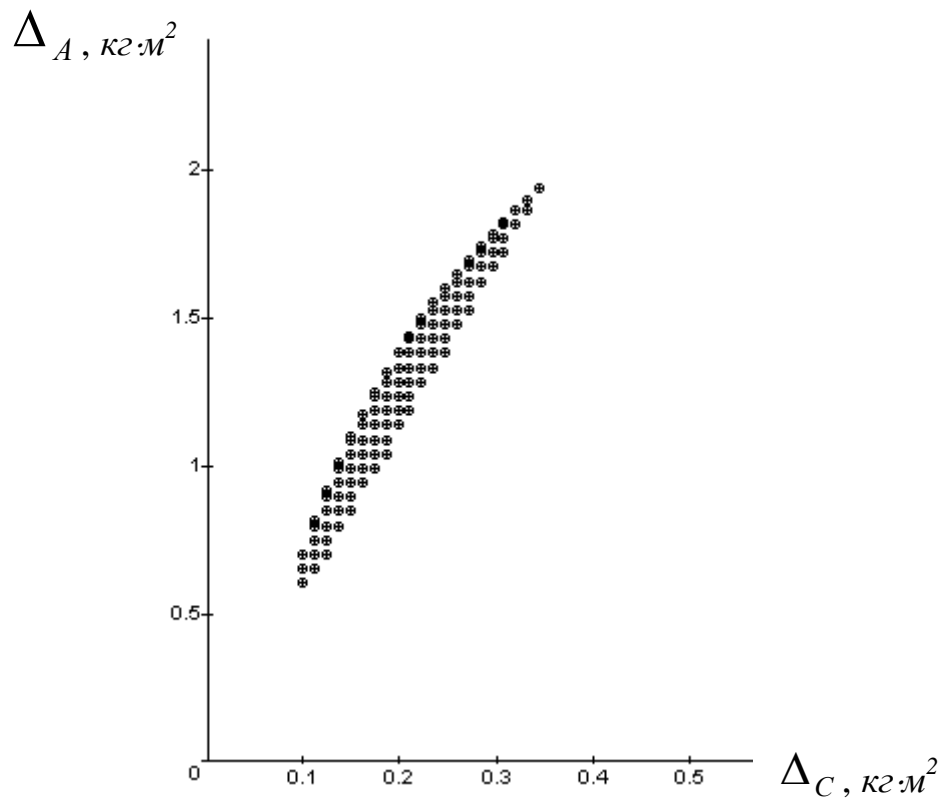


Рис. 15. Выделенное подмножество P^*

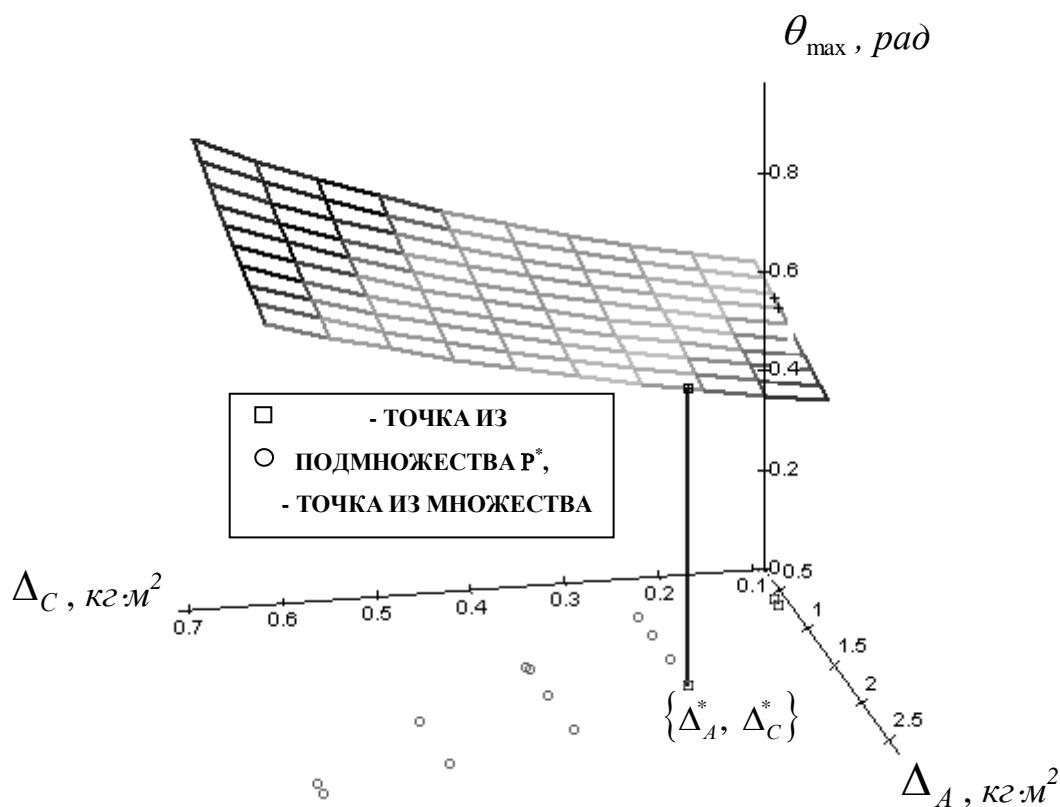


Рис.16. Максимальные значения угла нутации и оптимальные величины $\{\Delta_A^*, \Delta_C^*\}$

Указанные расчеты были проведены при следующих начальных условиях движения и инерционно-массовых параметрах КА:

Параметры оптимальной стабилизации

Таблица 1

<p><i>Начальные условия движения:</i></p> <p>$\psi_0 = \gamma_0 = 0,1 \text{ рад}, \beta = \pi/4 \text{ рад},$ $r_0 = 0 \text{ рад/с}, \sigma_0 = 20 \text{ рад/с},$ $L_0 = 1,1 \text{ рад/с}, s_0 = 0 \text{ рад}, T = 25 \text{ с},$</p>	<p><i>Инерционно-массовые параметры КА:</i></p> <p>$A_1 = 2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad A_2 = 2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$ $C_1 = 0,9 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad C_2 = 0,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$ $m_0 = 65 \text{ кг}, \quad m_k = 50 \text{ кг}, \quad m = 57 \text{ кг}, \quad P = 1400 \text{ Н}.$</p>
---	--

Для параметров (табл. 1) также были проведены расчеты значений ошибок Π_1 и Π_2 в точках области проектных параметров и подмножества P^* . На рисунках (рис. 17, 18) представлены результаты,

полученные с помощью аналитических зависимостей (3.5), (3.15) и (3.17). Результаты расчетов значений ошибок Π_1 и Π_2 , полученные путем численного интегрирования полных систем дифференциальных уравнений (2.33), (2.41) и (3.2), представлены на рис. 19 и 20, при этом для определения номинальной скорости была применена формула (3.20).

На рисунках встречаются следующие графические обозначения:

- - точки из пространства проектных параметров;
- - точка из подмножества P^* ;
- ⊕ - значение соответствующей ошибки, вычисленное для “оптимальной” точки.

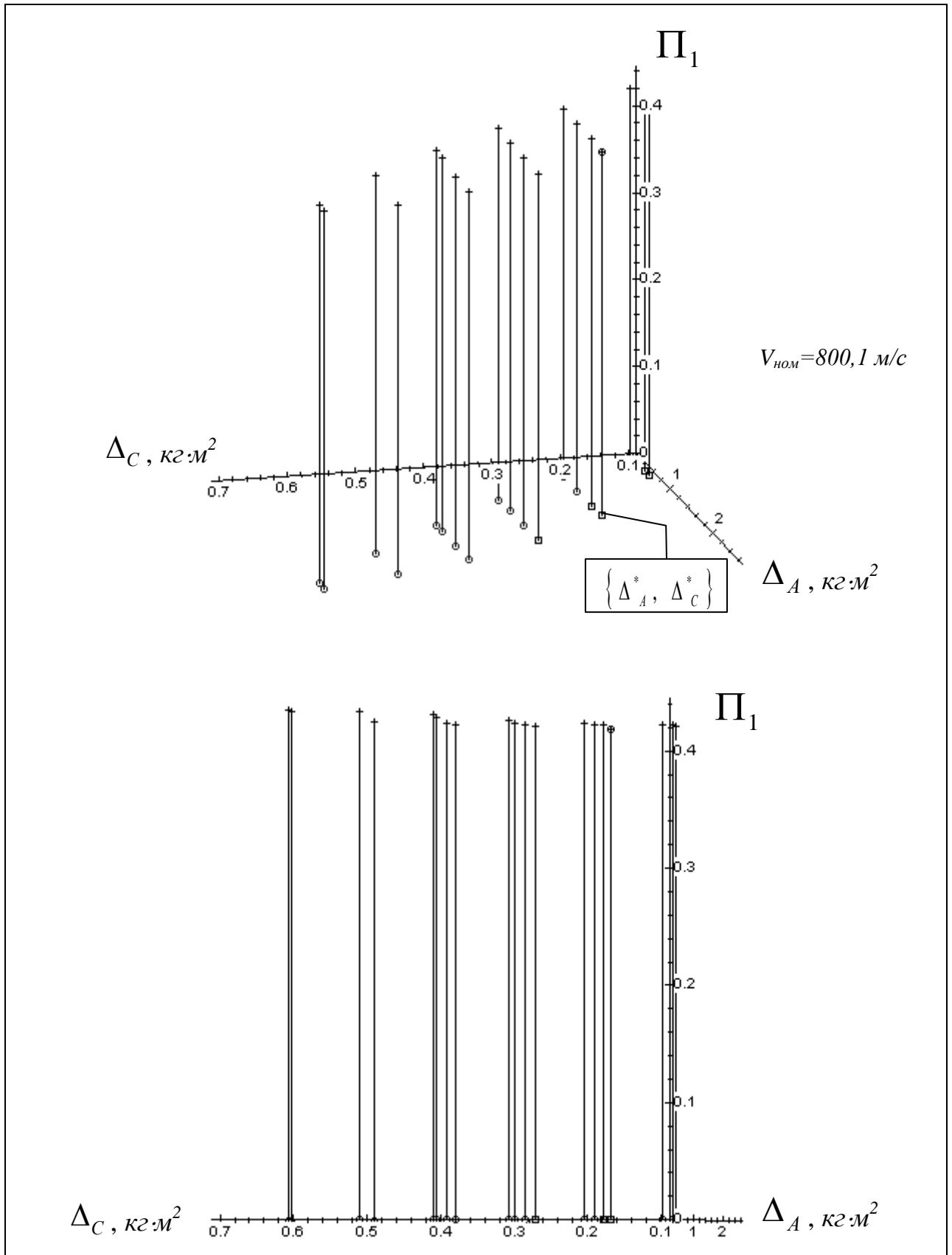


Рис. 17. Значения угловой ошибки в выдаче тормозного импульса

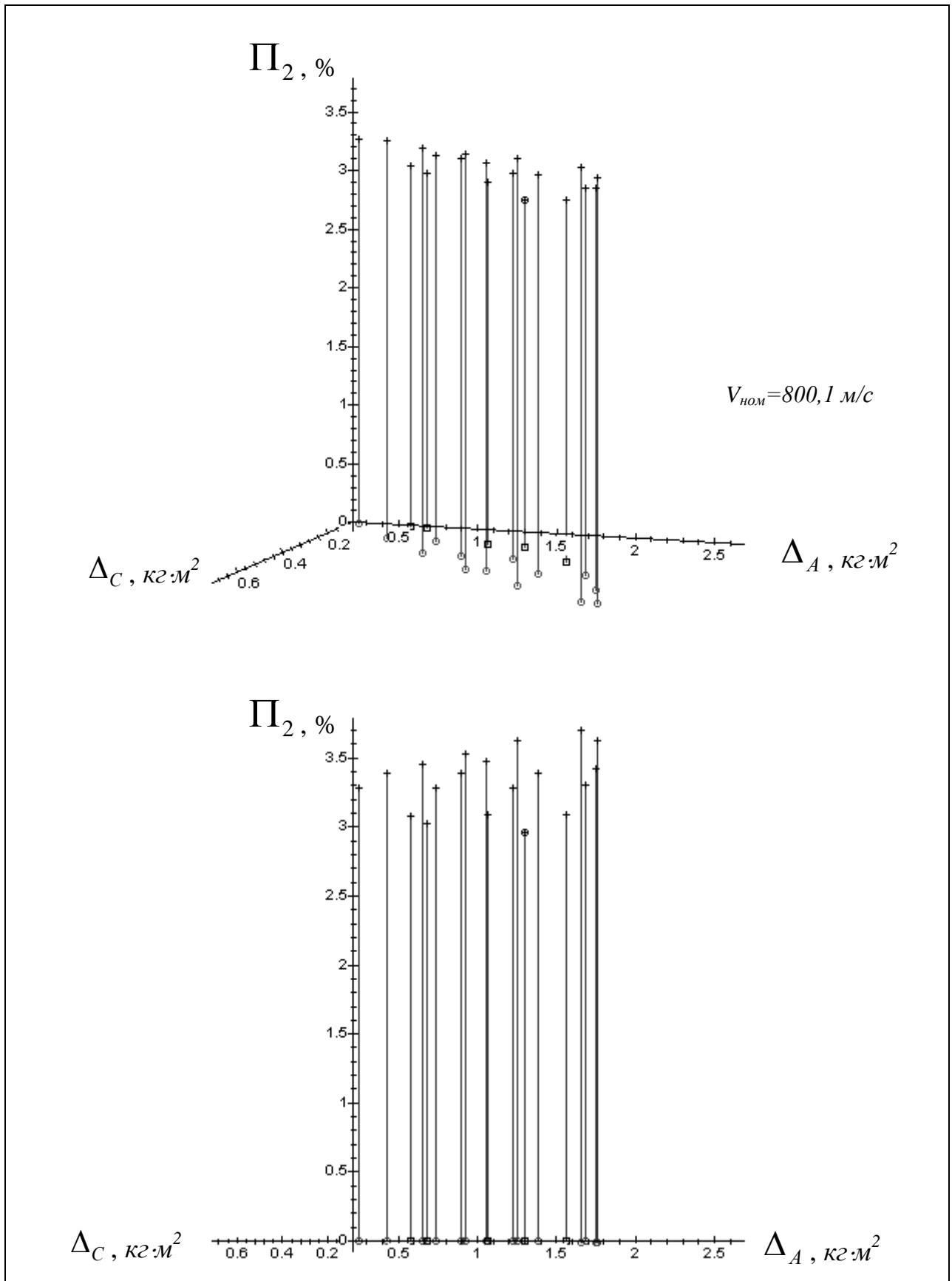


Рис. 18. Значения относительной ошибки в приращении скорости центра масс по величине

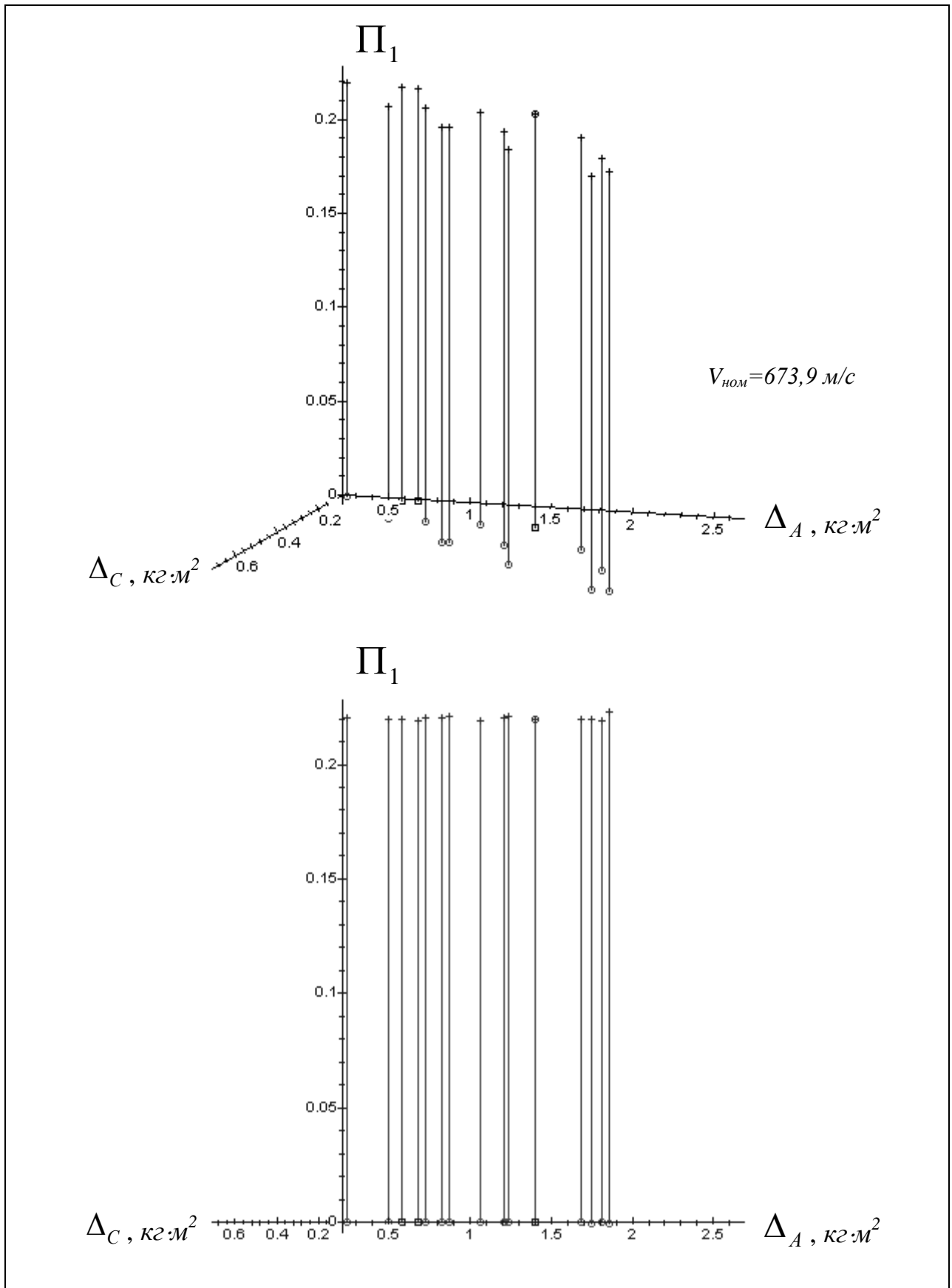


Рис. 19. Значения угловой ошибки в выдаче тормозного импульса при численном интегрировании

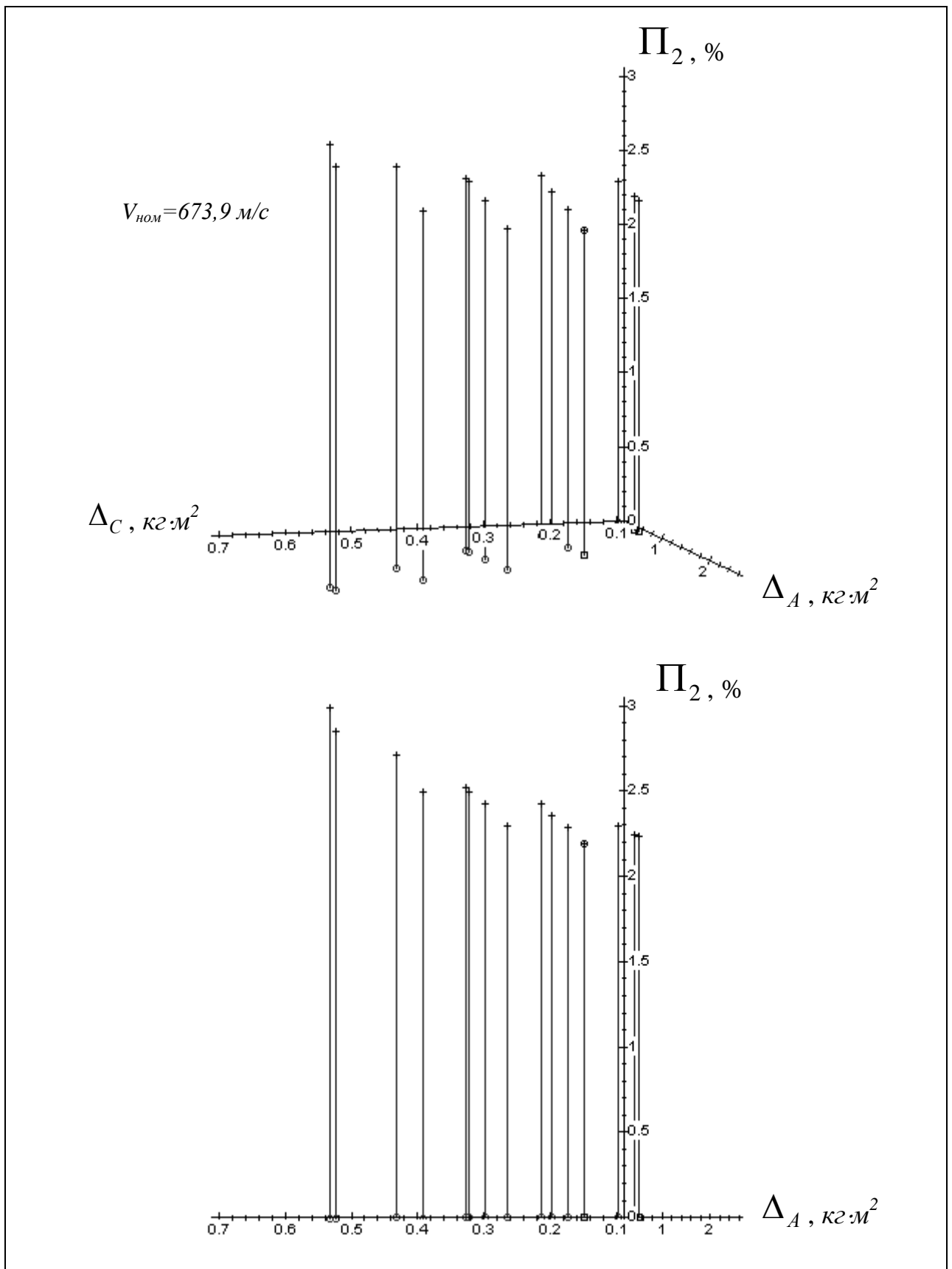


Рис. 20. Значения относительной ошибки в приращении скорости центра масс по величине при численном интегрировании

Из расчетов следует, что значения угловой ошибки Π_1 и ошибки по величине Π_2 в выдаче тормозного импульса завышены примерно в 1,5-2 раза при расчетах по аналитическим зависимостям по сравнению с результатами численного интегрирования полных уравнений. Это завышение гарантирует получение на практике меньших ошибок, по сравнению со значениями, следующими из аналитических зависимостей.

Видно также, что величины угловых ошибок, вычисленные в оптимальной точке $\{\Delta_A^*, \Delta_C^*\}$, не являются наименьшими. Это объясняется тем, что угловая ошибка существенно зависит от длительности работы тормозной двигательной установки. На рис.21 представлены зависимости угловых ошибок от длительности работы ТДУ для некоторых точек пространства проектных параметров, а жирной линией изображена соответствующая зависимость для оптимальной точки $\{\Delta_A^*, \Delta_C^*\}$. Расчет проводился для моментов времени, начиная с $t=0,1$ с, так как в начальный момент времени угловая ошибка не определена.

Оптимальность точки $\{\Delta_A^*, \Delta_C^*\}$ в данном случае заключается в том, что при прочих равных начальных условиях движения и инерционно-массовых параметрах КА наблюдается самая малая амплитуда и самое быстрое затухание нутационных колебаний (рис. 22) и, как следствие, самое быстрое затухание колебаний значений угловой ошибки (рис. 21), при этом ошибка по величине всегда принимает свое наименьшее значение (рис. 23).

Из приведенных рассуждений следует, что из-за колебаний величины угловой ошибки необходимо обращать внимание не столько на значение, сколько на скорость ее изменения, выбирая точку пространства проектных параметров с наиболее быстрым затуханием амплитуды колебаний. При этом всегда будет наблюдаться соответствие этой оптимальной точки с наименьшим значением ошибки в выдаче тормозного импульса по величине, т.е. вторая оценка (3.19) является ведомой.

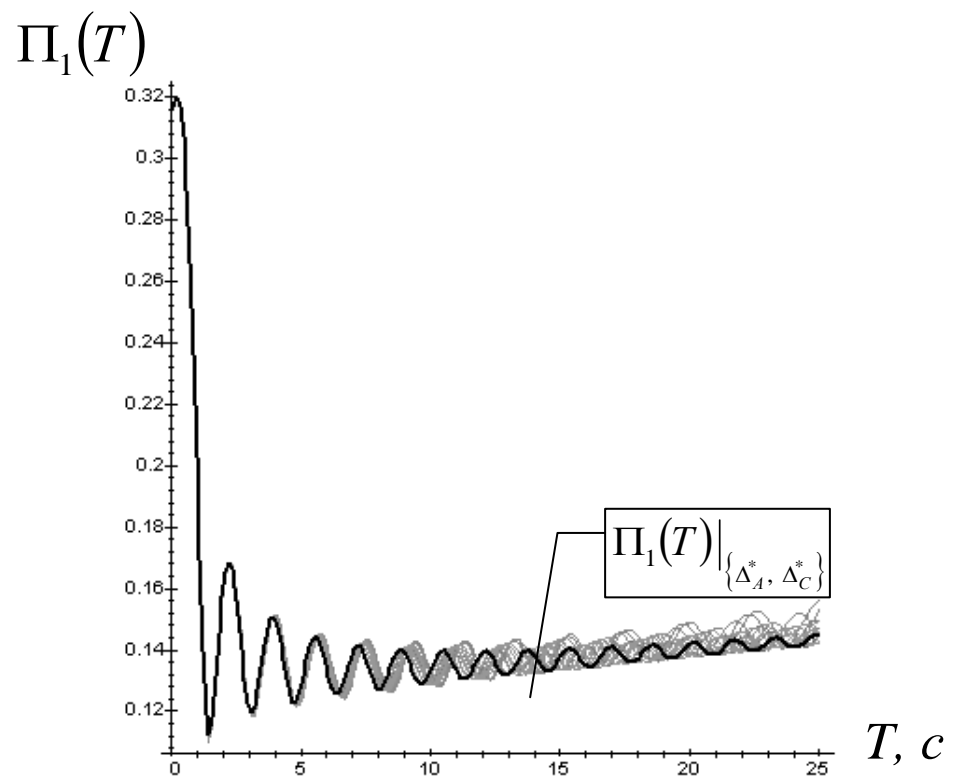


Рис. 21. Зависимости “угловых” ошибок от длительности работы ТДУ

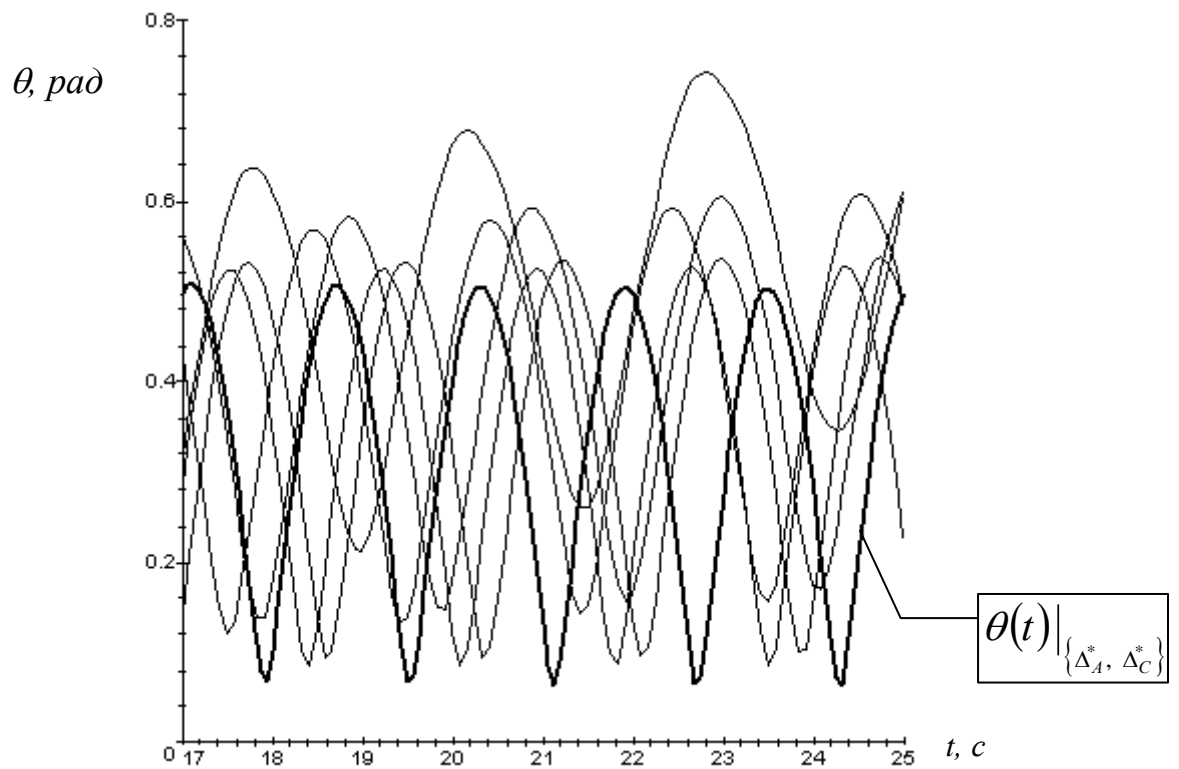


Рис. 22. Зависимости угла нутации от времени, полученные для точек из пространства проектных параметров и оптимальной точки $\{\Delta_A^*, \Delta_C^*\}$

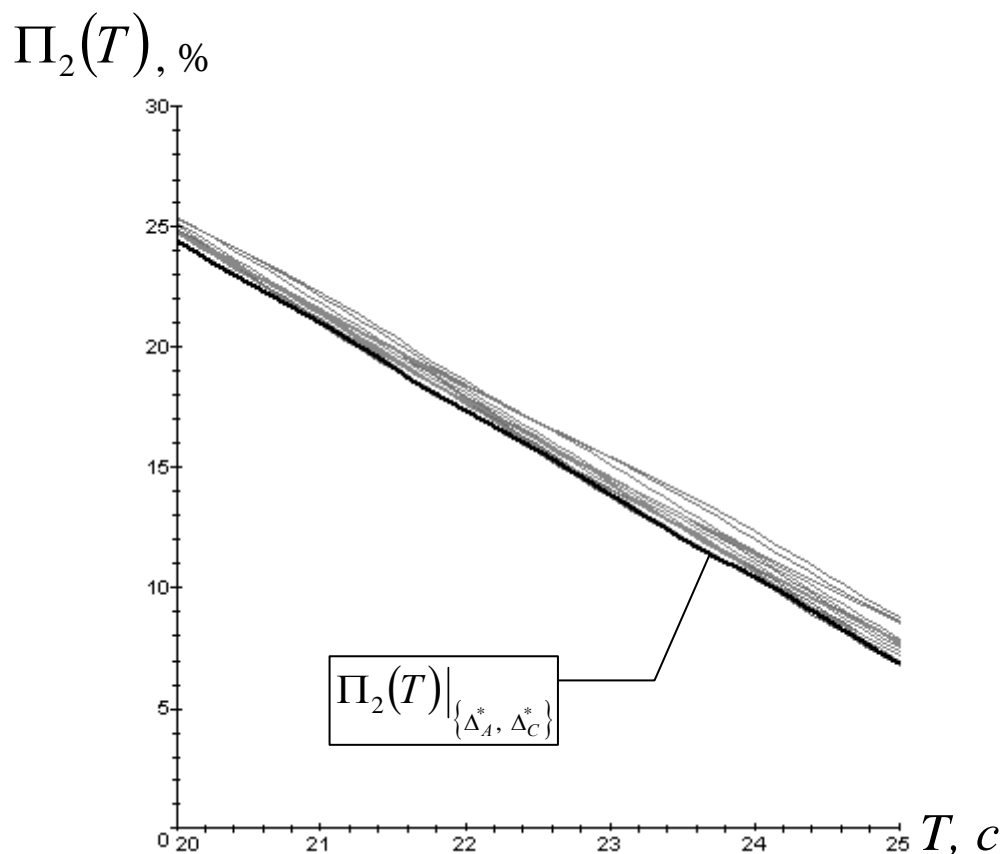


Рис. 23. Значения относительных ошибок “по величине” в зависимости от длительности работы ТДУ

Отметим, что приведенные выше расчеты соответствуют, в определенном смысле, “хорошей” или оптимальной стабилизации КА частичной закруткой, при которой наблюдаются небольшие значения угловой ошибки Π_1 и ошибки по величине Π_2 . Для реализации оптимальной стабилизации были приняты большая скорость закрутки и малые начальные отклонения по угловым скоростям и углам ориентации (табл. 1).

Приведем еще два расчета указанных параметров движения и значений ошибок: 1) рис. 24-27 - для случая “удовлетворительной” стабилизации, соответствующего малой скорости закрутки и малым начальным отклонениям по угловым скоростям и углам ориентации (табл. 2);

2) рис. 28-31 - для случая “плохой” стабилизации, реализующегося при малой скорости закрутки и больших начальных отклонениях по угловым скоростям и углам ориентации (табл. 3).

Параметры “удовлетворительной” стабилизации Таблица 2

<p>Начальные условия движения: $\psi_0 = \gamma_0 = 0,11 \text{ рад}$, $\beta = \pi/4 \text{ рад}$, $r_0 = 0 \text{ рад/с}$, $\sigma_0 = 10 \text{ рад/с}$, $L_0 = 0,5 \text{ рад/с}$, $s_0 = 0 \text{ рад}$, $T = 20 \text{ с}$,</p>	<p>Инерционно-массовые параметры КА: $A_1 = 2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $A_2 = 2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $C_1 = 0,9 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $C_2 = 0,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $m_0 = 65 \text{ кг}$, $m_k = 50 \text{ кг}$, $m = 57 \text{ кг}$, $P = 1400 \text{ Н}$.</p>
---	--

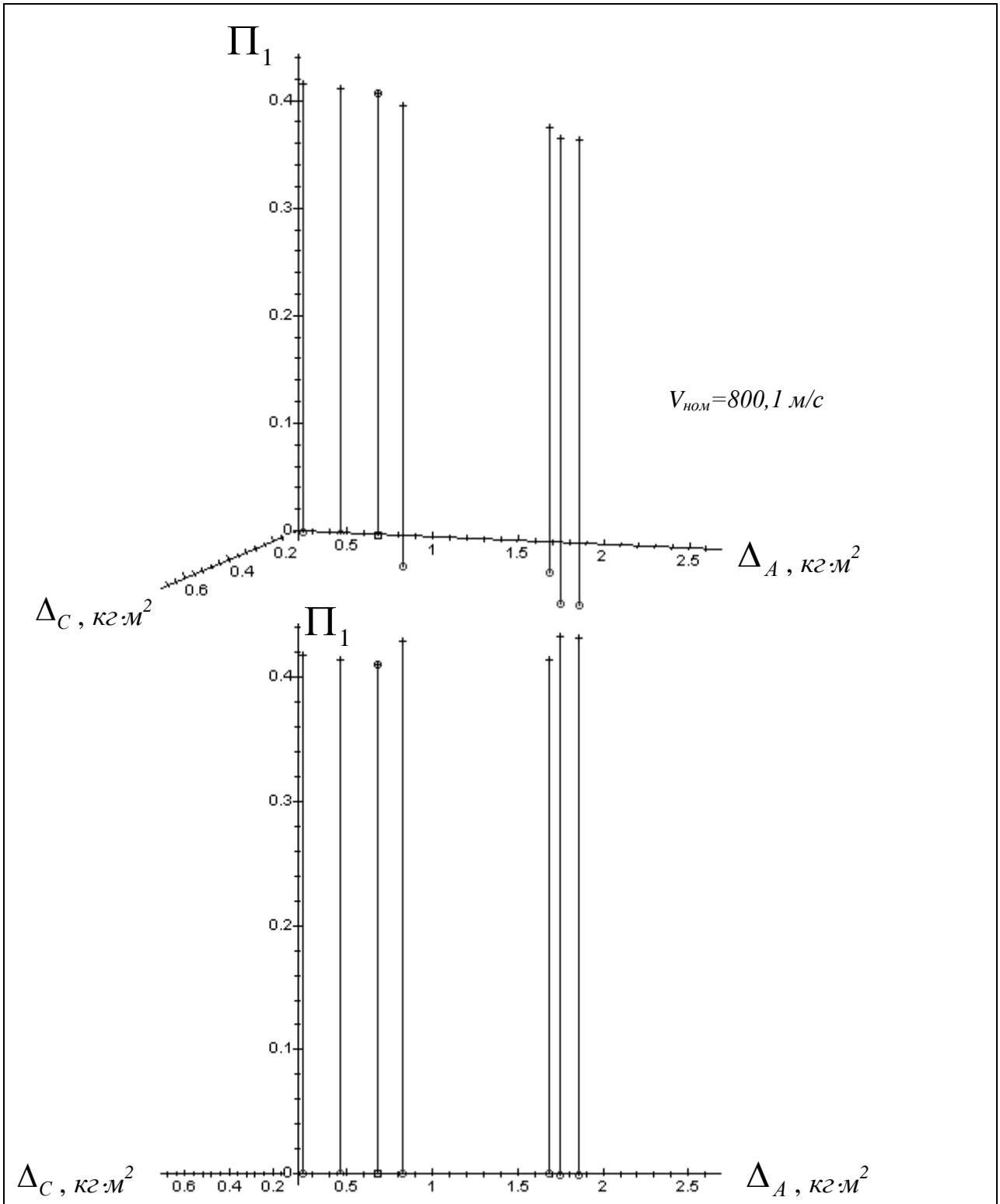


Рис. 24. Значения угловой ошибки в выдаче тормозного импульса

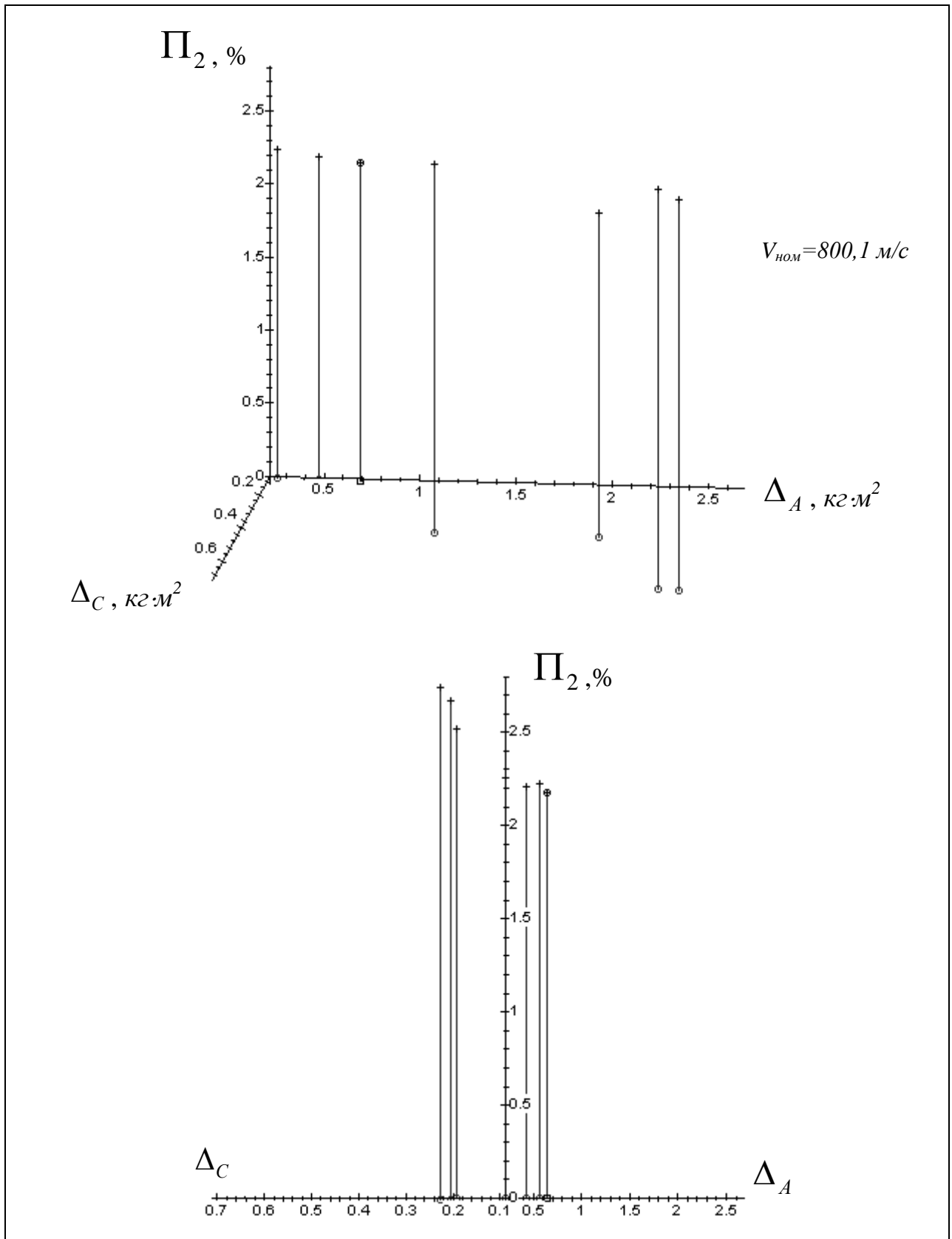


Рис. 25. Значения относительной ошибки в приращении скорости центра масс по величине

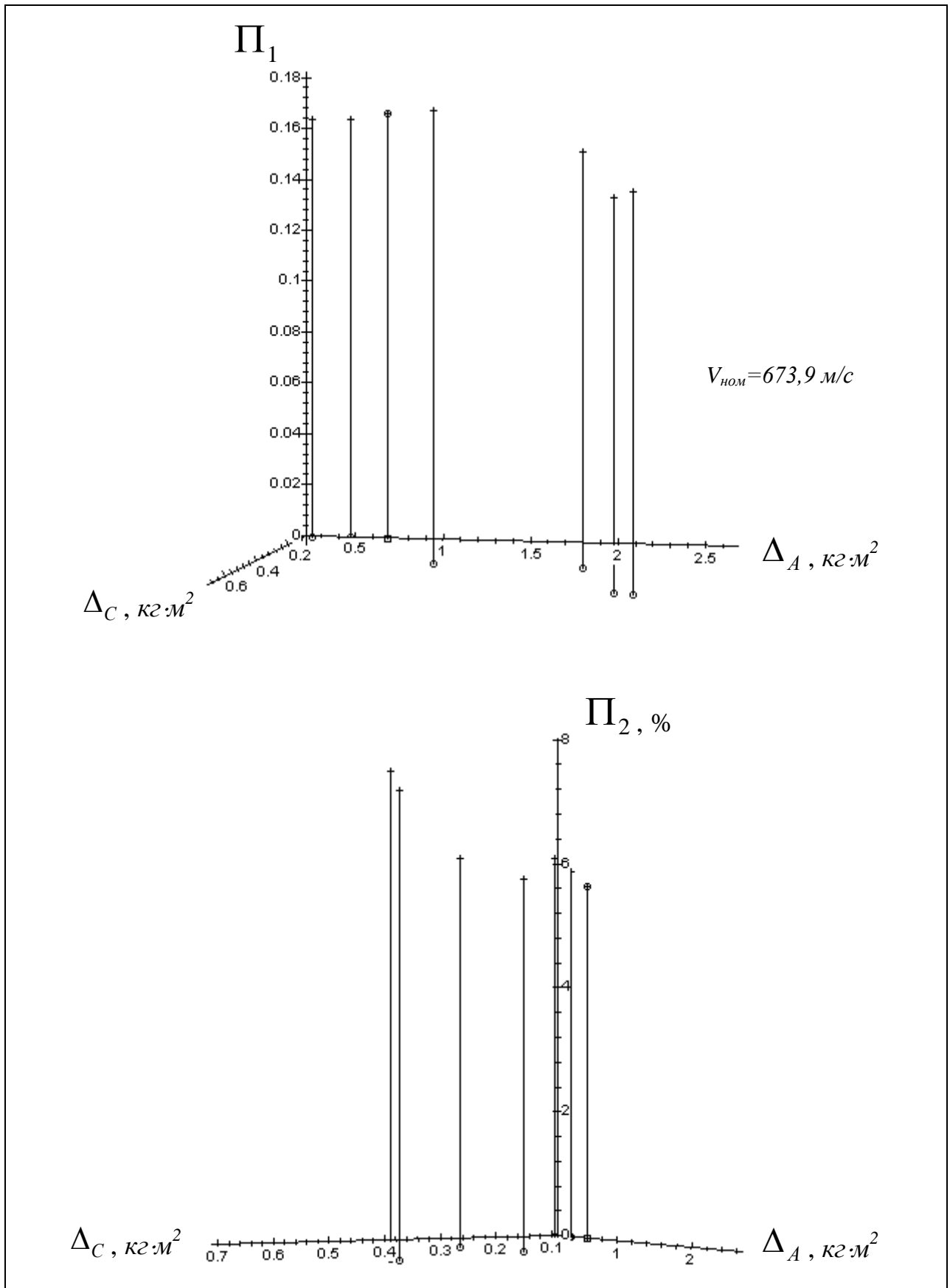


Рис. 26. Значения “угловой” ошибки и ошибки “по величине” при численном интегрировании

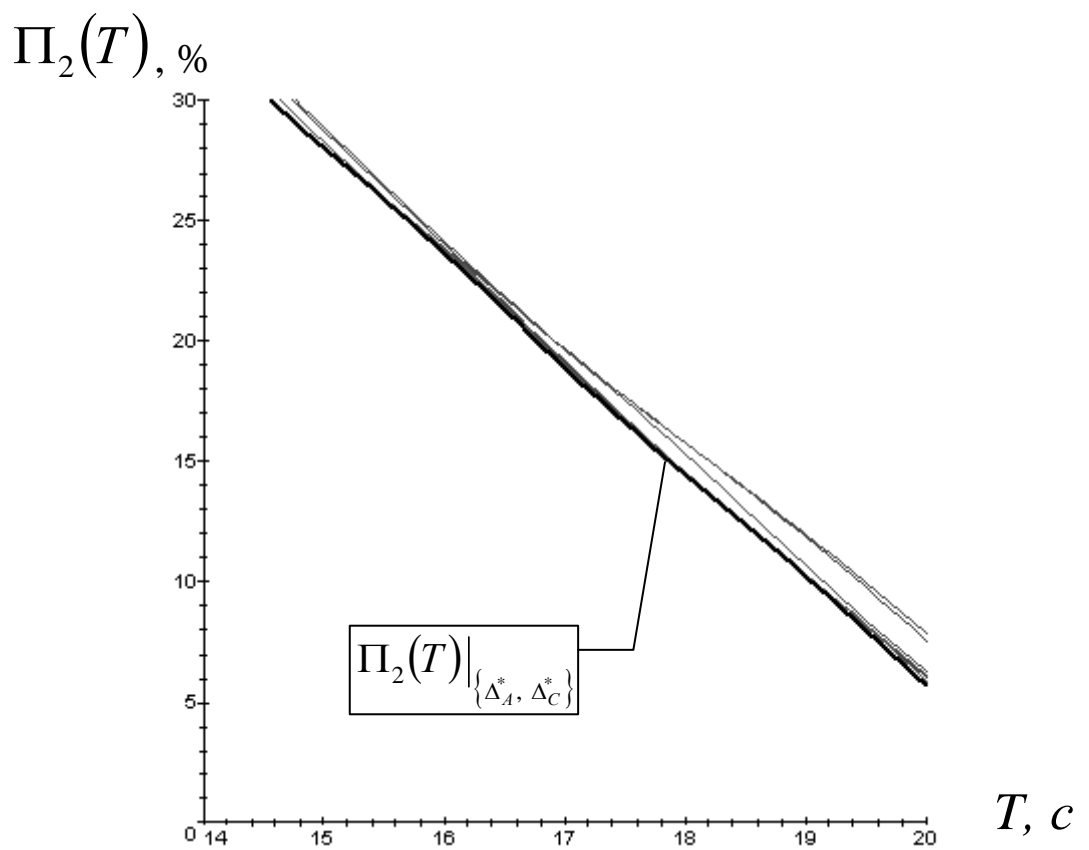
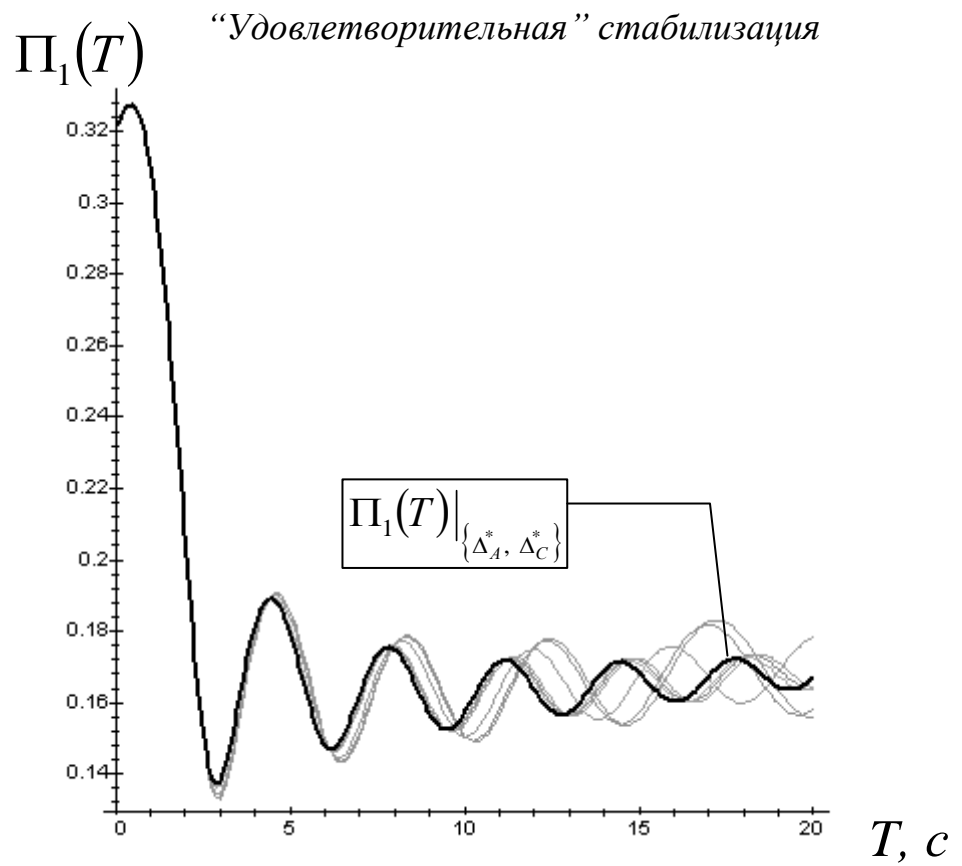


Рис. 27. Зависимости “угловых” ошибок и относительных ошибок “по величине” от длительности работы ТДУ

<p>Начальные условия движения:</p> <p>$\psi_0 = \gamma_0 = 0,81 \text{ рад}$, $\beta = \pi/4 \text{ рад}$,</p> <p>$r_0 = 0 \text{ рад/с}$, $\sigma_0 = 10 \text{ рад/с}$,</p> <p>$L_0 = 1,5 \text{ рад/с}$, $s_0 = 0 \text{ рад}$, $T = 20 \text{ с}$,</p>	<p>Инерционно-массовые параметры КА:</p> <p>$A_1 = 2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $A_2 = 2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$,</p> <p>$C_1 = 0,9 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $C_2 = 0,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$,</p> <p>$m_0 = 65 \text{ кг}$, $m_k = 50 \text{ кг}$, $m = 57 \text{ кг}$, $P = 1400 \text{ Н}$.</p>
---	--

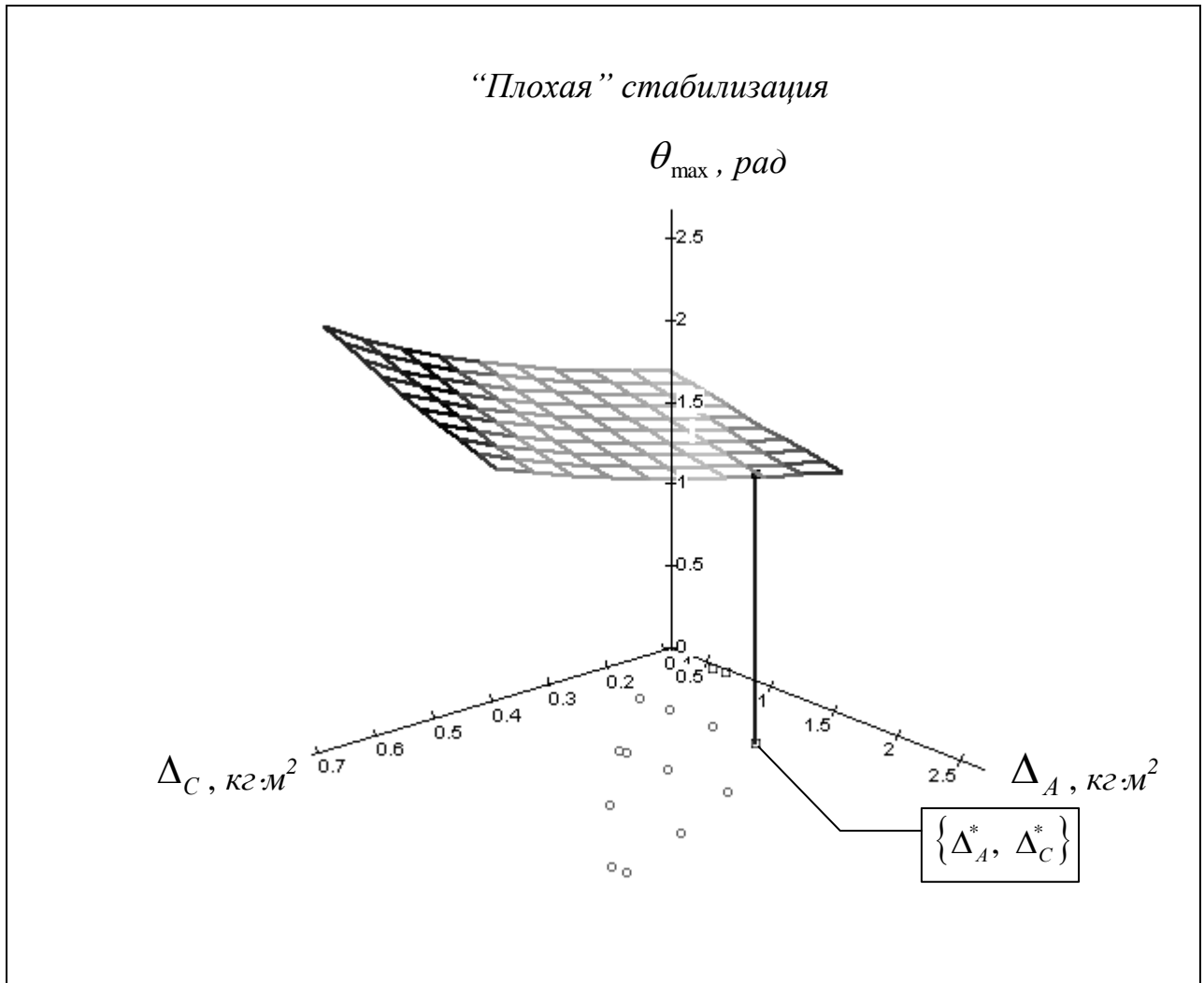


Рис. 28. Максимальные значения угла нутации
и оптимальные величины $\{\Delta_A^*, \Delta_C^*\}$

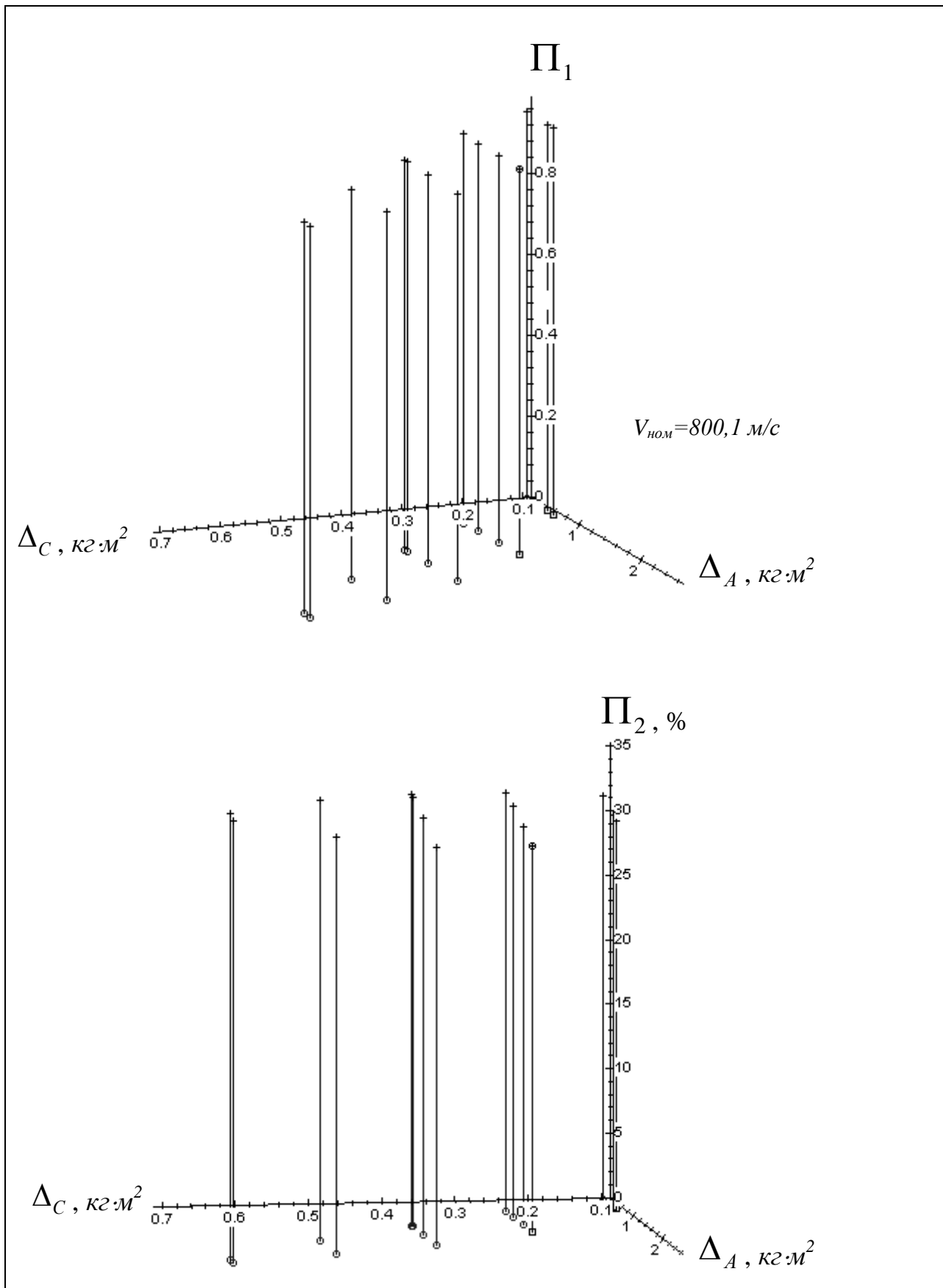


Рис. 29. Значения угловой ошибки в выдаче тормозного импульса и относительной ошибки в приращении скорости центра масс по величине

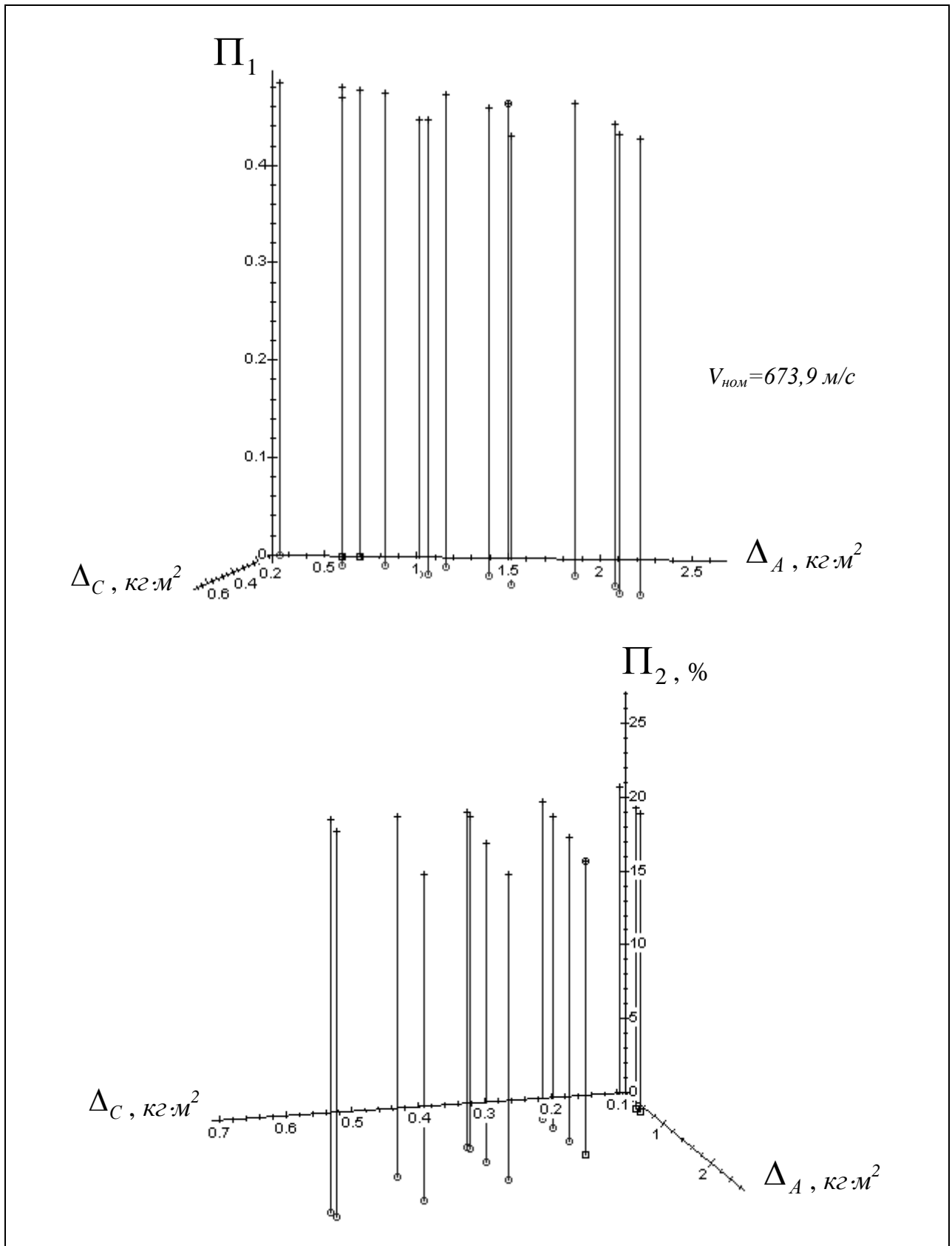


Рис. 30. Значения угловой ошибки в выдаче тормозного импульса и относительной ошибки в приращении скорости центра масс по величине при численном интегрировании

“Плохая” стабилизация

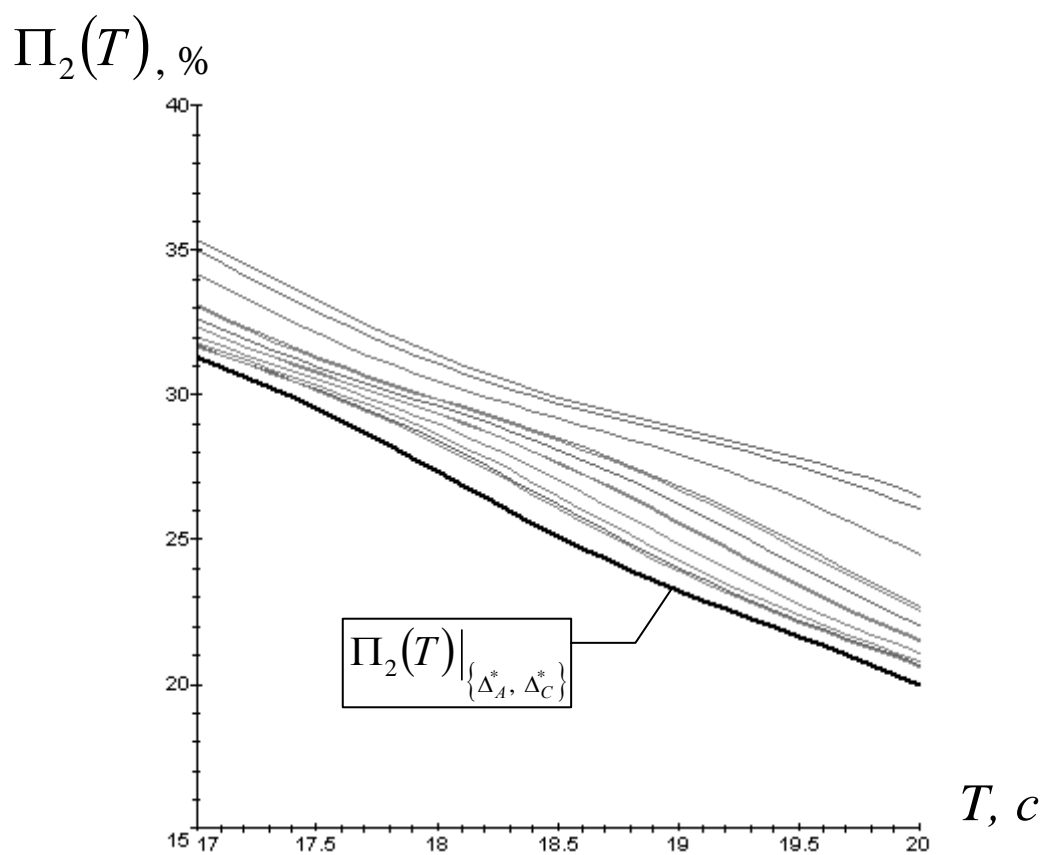
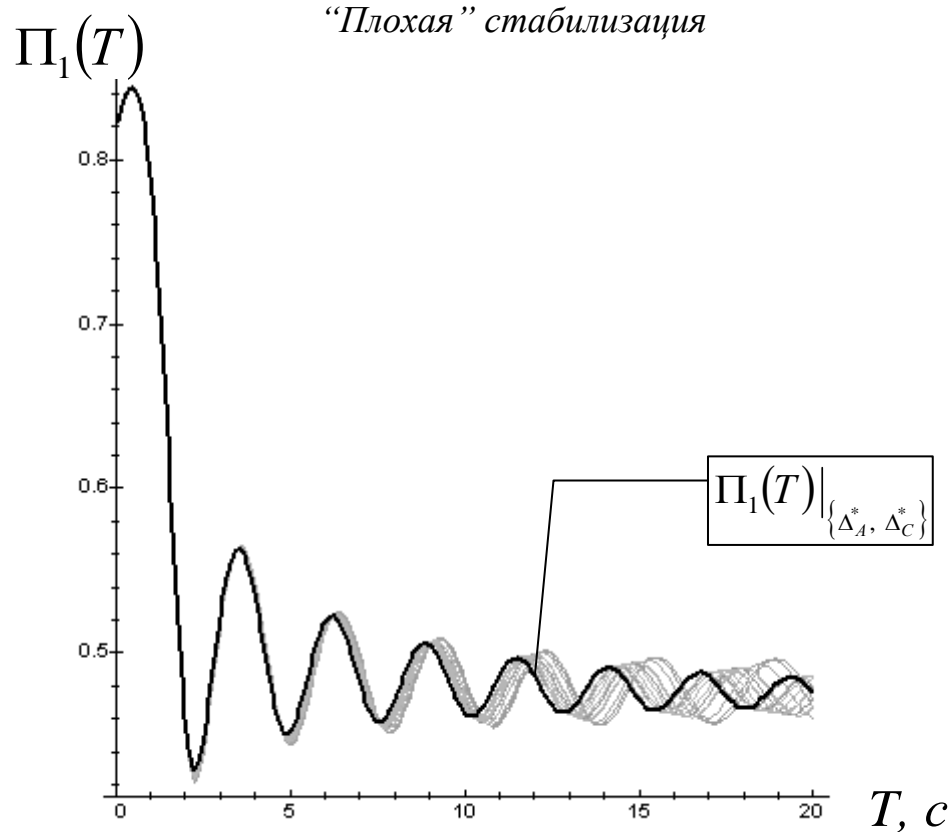


Рис. 31. Зависимости “угловых” ошибок и ошибок “по величине” от длительности работы ТДУ

Расчеты, во-первых, подтвердили тот вполне очевидный факт, что чем больше скорость закрутки, тем меньше угловая ошибка и ошибка по величине выдачи тормозного импульса. Во-вторых, показано, что из пространства проектных параметров следует выбирать точку $\{\Delta_A^*, \Delta_C^*\}$, которая оказывается наилучшей, так как ей соответствует самое быстрое затухание и самая малая амплитуда нутационных колебаний [3], а также наименьшие значения ошибок “по углу” и “по величине”.

Таким образом, получены аналитические зависимости, позволяющие оценивать эффективность стабилизации КА с двойным вращением частичной закруткой и наглядно характеризовать качественную картину движения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрена динамика движения КА с двойным вращением при реализации активных маневров, связанных с межорбитальными переходами (на примере перехода на орбиту спуска). Проиллюстрировано решение ряда сопутствующих задач, связанных с анализом пространственного и траекторного движения КА, а также определения эффективности частичной закрутки.

Изучены следующие важные аспекты:

1. Моделирование и построение уравнений движения КА переменного состава.
2. Определение аналитических зависимостей для движения КА.
3. Получение условий уменьшения амплитуды нутационных колебаний соосных КА переменной массы.
4. Проведение оценки эффективности стабилизации частичной закруткой КА с двойным вращением.

Описанные в пособии подходы позволяют проводить исследование движения КА с двойным вращением при стабилизации частичной закруткой, а также осуществлять выбор начальных условий движения и инерционно-массовых параметров подобных аппаратов, обеспечивающих реализацию тех или иных режимов движения.

Пособие предназначено для научно-методического сопровождения курса «Динамика движения космических аппаратов переменного состава», читаемого магистрантам СГАУ, обучающимся по направлению 161100.68 «Системы управления движением и навигация». Также пособие будет полезно магистрантам, обучающимся по смежным техническим и естественнонаучным направлениям подготовки (в рамках УГС 01 «Физико-математические науки» и 16 «Авиационная и ракетно-космическая техника»).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аникеев Г. И.* Нестационарные почти периодические колебания роторов. М.: Наука, 1979. 136 с.
2. *Асланов В. С., Дорошин А. В.* Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении //Космические исследования. Т. 40. №2. 2002 г.
3. *Асланов В. С., Дорошин А. В., Круглов Г. Е.* Движение соосных тел переменного состава на активном участке спуска // Космические исследования. Т.43. №3, 2005. С.224-232.
4. *Асланов В. С., Дорошин А. В.* Движение системы соосных тел переменного состава. // Прикладная математика и механика. Т.68. Вып.6. 2004г.
5. *Асланов В. С., Дорошин А. В.* Стабилизация космического аппарата как системы соосных тел при ориентированном входе в атмосферу. // XXIV академические чтения по космонавтике. Тезисы докладов. М.: "Война и мир", 2000. С. 110-111.
6. *Асланов В. С., Дорошин А.В.* О двух случаях движения неуравновешенного гиростата. // Известия Академии Наук. Серия: Механика твердого тела, №4, 2006, с.42-55.
7. *Асланов В. С., Дорошин А.В.* Влияние возмущений на угловое движение КА на активном участке спуска // Космические исследования. Т.46. №2, 2008. С. 168-173.
8. *Асланов В. С., Тимбай И. А.* Некоторые задачи динамики неуправляемого спуска КА в атмосфере. // Космич. исслед. 1995.Т. 33. № 6. С. 639-645.
9. *Алексеев А.В., Дорошин А. В.* Движение системы соосных тел с медленно вращающимися роторами // Сборник трудов XII

- Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, 2006 г. С.9-12.
10. *Алексеев А.В., Дорошин А.В.* Приведение спутника-гиростата с полостью с жидкостью к системам твердых тел с вязким трением // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». Вып.9. 2007. М.: Машиностроение. С. 26-33.
 11. *Аншаков Г.П. Асланов В.С. Балакин В.Л. Квашин А.С. Круглов Г.Е. Юдинцев В.В. Дорошин А.В., Сверчков А.А.* Динамические процессы в ракетно-космических системах // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. Самара: СГАУ, №1, 2003 г.
 12. *Бейнум П. М., Фуксел П. Дж., Мэкисон Д. Л.* Движение и устойчивость спутника с двойным вращением, снабженного демпферами нутации. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 59-78.
 13. *Белецкий В. В., Новикова Е. Т.* О пространственном движении связки двух тел на орбите. // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. №5, С. 23-28.
 14. *Белецкий В. В., Новикова Е. Т.* Об относительном движении связки двух тел на орбите. // Космич. исслед. 1969. Т.7. № 3. С. 377-384.
 15. *Бухгольц Н. Н.*, Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1972. Ч. 2. 332 с.
 16. *Виницкий А. М.* Ракетные двигатели на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1973. 347 с.
 17. *Виницкий А. М., Волков В. Т., Волковицкий И. Г., Холодилов С. В.* Конструкция и отработка РДТТ. М.: Машиностроение, 1980. 231 с.
 18. *Виньерон Ф. Р.* Об устойчивости спутника с двойным вращением на круговой орбите. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 92-100.

19. Виньерон Ф. Р. Об устойчивости спутника с двойным вращением, снабженного двумя демпферами. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 79-91.
20. Ганиев Р. Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.
21. Дорошин А. В. Движение спускаемого аппарата с вращающимся стабилизирующим блоком. // Сборник трудов X Всероссийского научн.-тех. семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самарский гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2002. С. 77-80.
22. Дорошин А. В. Эволюции прецессионного движения неуравновешенных гироскопов переменного состава // Прикладная математика и механика. Т.72. Вып.3. 2008. С.385-398.
23. Дорошин А. В. Моделирование движения спускаемого аппарата с частичной закруткой как системы соосных тел с упругой осью. // Сборник трудов IX Всероссийского научн.-тех. семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самарский гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2000. С. 64-67.
24. Дорошин А. В. Стабилизация спускаемого аппарата с двойным вращением при наличии малой динамической асимметрии. // Ракетно-космическая техника. Научно-технический сборник. Серия XII. Вып. 1. "Расчет, проектирование, конструирование и испытания космических систем". Самара: ВКБ РКК "Энергия", 2001. С. 133-150.
25. Doroshin A.V. Phase Space research of One Non-autonomous Dynamic System // Mathematical Methods and Computational Techniques in Research and Education. Proceedings of the 3rd WSEAS/IASME International Conference on DYNAMICAL SYSTEM and CONTROL. Arcachon, France, 2007, pp.161-165.

26. *Doroshin A.V.* Synthesis Of Attitude Motion Of Variable Mass Coaxial Bodies// WSEAS TRANSACTIONS on SYSTEMS and CONTROL, Issue 1, Volume 3, January 2008 (ISSN: 1991-8763). Pp. 50-61.
27. *Doroshin A.V.* Analysis of attitude motion evolutions of variable mass gyrostats and coaxial rigid bodies system // International Journal of Non-Linear Mechanics 45 (2010) 193–205.
28. *Doroshin A.V.* Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 16, Issue 8, August 2011, Pages 3188-3202.
29. *Doroshin A.V.* Heteroclinic dynamics and attitude motion chaotization of coaxial bodies and dual-spin spacecraft.// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 17, Issue 3, March 2012, Pages 1460-1474.
30. *Енохович А. С.* Справочник по физике и технике. М.: Просвещение, 1989. 224 с.
31. *Заболотнов Ю. М.* Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере КА с малой асимметрией. I. // Космич. исслед. Т.31. № 6. 1993. С. 39-50.
32. *Заболотнов, Ю.М., Любимов В.В.* Вторичный резонансный эффект при движении КА в атмосфере // Космические исследования. - 1998.- Т. 36, № 2.-С.206-214.
33. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во ленинградского ун-та, 1983. 344 с.
34. *Каменков Е. Ф.* Маневрирование спускаемых аппаратов. М.: Машиностроение, 1983. 183 с.
35. *Колесников Н. Н.* Регулярная прецессия свободного гиростата. // Прикладная математика и механика. Т.30. № 3. 1966. С. 589-593.
36. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных и инженерных работников. М.: Наука, 1984. 832 с.

37. *Космодемьянский А. А.* Курс теоретической механики. Часть II. М.: Просвещение, 1966. 398 с.
38. *Крементуло В. В.* О стабилизации вращательного движения твердого тела при помощи двух маховиков. // Изв. АН СССР. МТТ. №5. 1974. С. 10-15.
39. *Крементуло В. В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука, 1977. 264 с.
40. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Физматлит. 2001. 296 с.
41. *Лайкинс П. У., Цэн Гань-тай, Мингори Д. Л.* Устойчивые предельные циклы спутников с двойным вращением, обусловленные нелинейным демпфированием. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 101-122.
42. *Лиска Д. Дж.* Простое описание совместного нутационно - прецессионного движения в системе из n соосных вращающихся тел. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 9-28.
43. *Мак-Интайр Дж., Джанелли М.* О качании оси крепления составляющих тел спутника с двойным вращением. // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 39-58.
44. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.
45. *Миеле А.* Механика полета. М.: Наука, 1965. Т. 1. 407 с.
46. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
47. *Набиуллин М. К.* Об устойчивости стационарных движений свободного гиростата в осесимметричных полях тяготения. // Изв. АН СССР. МТТ. №2. 1972. С. 17-26.
48. *Набиуллин М. К.* Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. Новосибирск: Наука, Сиб. Отд-ние, 1990. 354 с.

49. *Нейштадт А. И., Пивоваров М. Л.* Переход через сепаратрису в динамике спутника с двойным вращением. // Прикладная математика и механика. 2000. Т.64. № 5.
50. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд. техн.-теорет. лит-ры, 1949. 550 с.
51. *Рожков В. В.* Двигатели ракет на твердом топливе. М.: Воениздат, 1971. 118 с.
52. *Соллогуб А. В., Анишаков Г. П., Данилов В. В.* Космические аппараты систем зондирования поверхности Земли. Под редакцией *Козлова Д.И.* М.: Машиностроение, 1993. 368 с.
53. *Ханаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высшая школа, 1988. 184 с.
54. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.,* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
55. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
56. *Ярошевский В. А.* Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. М.: Наука, 1988. 336 с.
57. *Hall C. D.* Resonance capture in axial gyrostat. // J. Astronaut. V.43. №2. 1995. P.127-138.

УДК 531.01; 531.36; 517.9; 537.

Автор-составитель: **Дорошин Антон Владимирович**

Динамика движения космических аппаратов переменного состава:
[Электронный ресурс] : Электронное учебное пособие.

Выполнено в рамках электрон. учебно-методического комплекса по курсу «Динамика движения космических аппаратов переменного состава» / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. А. В. Дорошин - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Режим доступа: <http://fla.ssau.ru/moodle/>

Электронное учебное пособие «Динамика движения космических аппаратов переменного состава» предназначено для студентов-магистрантов факультета летательных аппаратов, обучающихся по направлению подготовки магистров 161100 «Системы управления движением и навигация».

Пособие разработано на кафедре космического машиностроения.

Издано в рамках выполнения Программы развития Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва» на 2009-2018 годы.

© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2013