

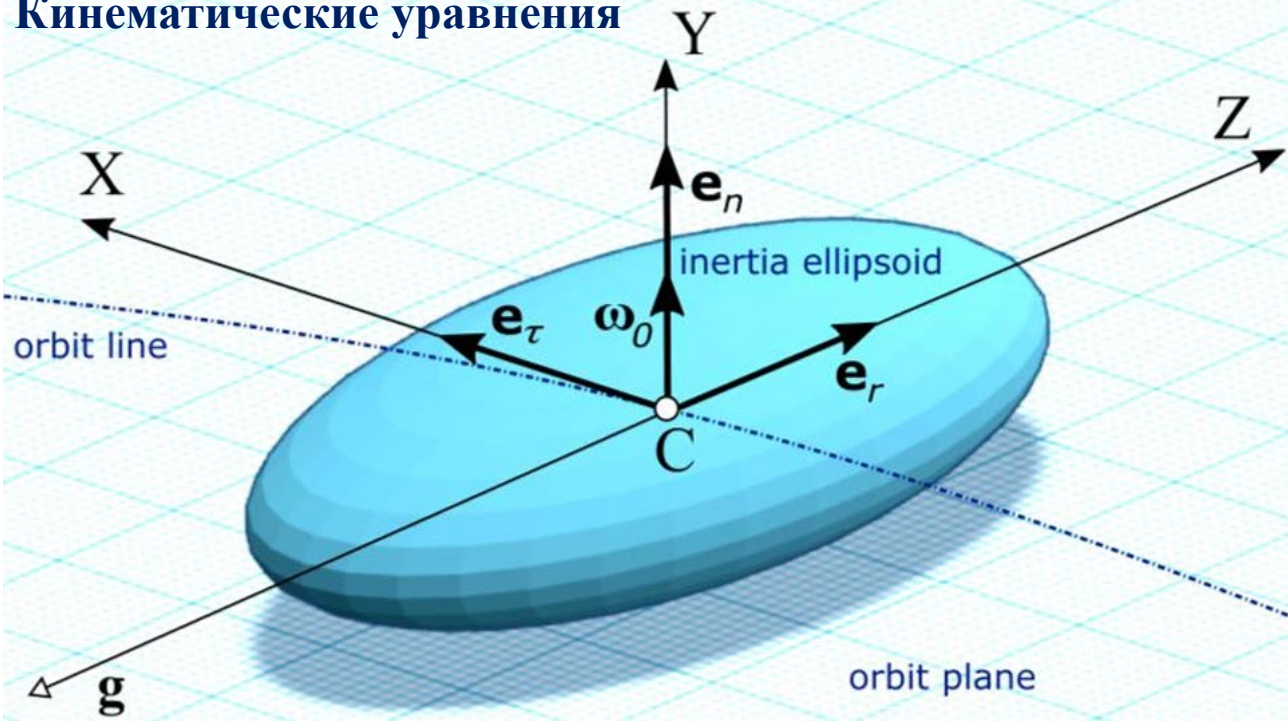
# Аспекты динамики углового движения КА на орбите

Дорошин А.В.

Самарский национальный исследовательский университет имени  
академика С.П. Королёва

# Кинематические уравнения

## Кинематические уравнения



## «Пуассоновы уравнения»

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{de_r}{dt} = \mathbf{e}_r \times \boldsymbol{\omega} + \omega_0 \mathbf{e}_\tau; \\ \frac{de_n}{dt} = \mathbf{e}_n \times \boldsymbol{\omega}; \\ \frac{de_\tau}{dt} = \mathbf{e}_\tau \times \boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_r; \end{array} \right. \quad (1)$$

Вектор относительной угловой скорости вращения тела в орбитальных осях XYZ:  $\vec{\omega} \approx \vec{\omega} - \omega_0 \vec{e}_n$ .

Тогда ур-е Пуассона для  $\mathbf{e}_r$  в осях XYZ:

$$\frac{d\vec{e}_R}{dt} = \vec{e}_R \times \vec{\omega} \approx \vec{e}_R \times \vec{\omega} - \omega_0 (\vec{e}_R \times \vec{e}_n).$$

$$\vec{e}_n \times \vec{e}_R = \vec{e}_\tau,$$

Тогда ур-е Пуассона для  $\mathbf{e}_\tau$  в осях XYZ:

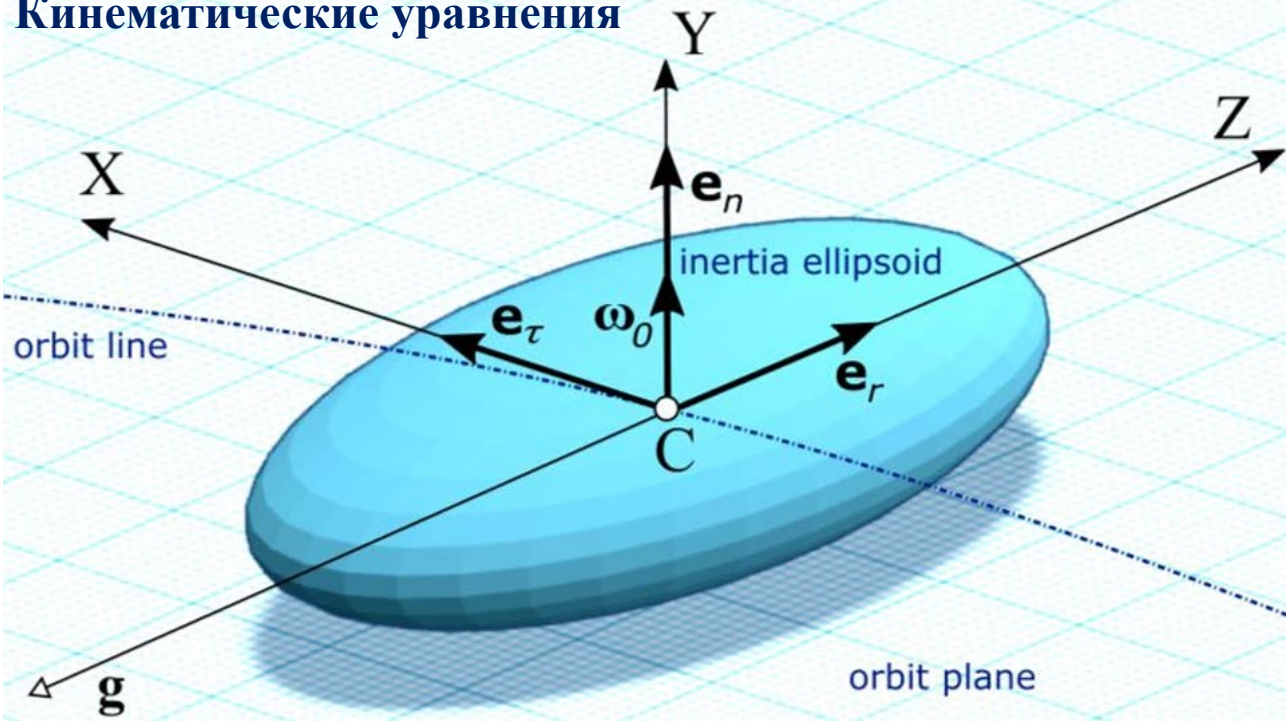
$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \vec{e}_\tau \times \vec{\omega} \approx \vec{e}_\tau \times \vec{\omega} - \omega_0 (\vec{e}_\tau \times \vec{e}_n),$$

$$\vec{e}_\tau \times \vec{e}_n = \vec{e}_R,$$

ур-е Пуассона для  $\mathbf{e}_n$  в абсолютных осях имеет типовой вид:

$$\frac{d\vec{e}_n}{dt} = \vec{e}_n \times \vec{\omega}.$$

## Кинематические уравнения



В связанной системе координат твердого тела единичные векторы координируются направляющими косинусами:

$$\mathbf{e}_\tau = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T = [\alpha, \alpha', \alpha'']^T;$$

$$\mathbf{e}_n = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T = [\beta, \beta', \beta'']^T;$$

$$\mathbf{e}_r = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_i]^T = [\gamma, \gamma', \gamma'']^T;$$

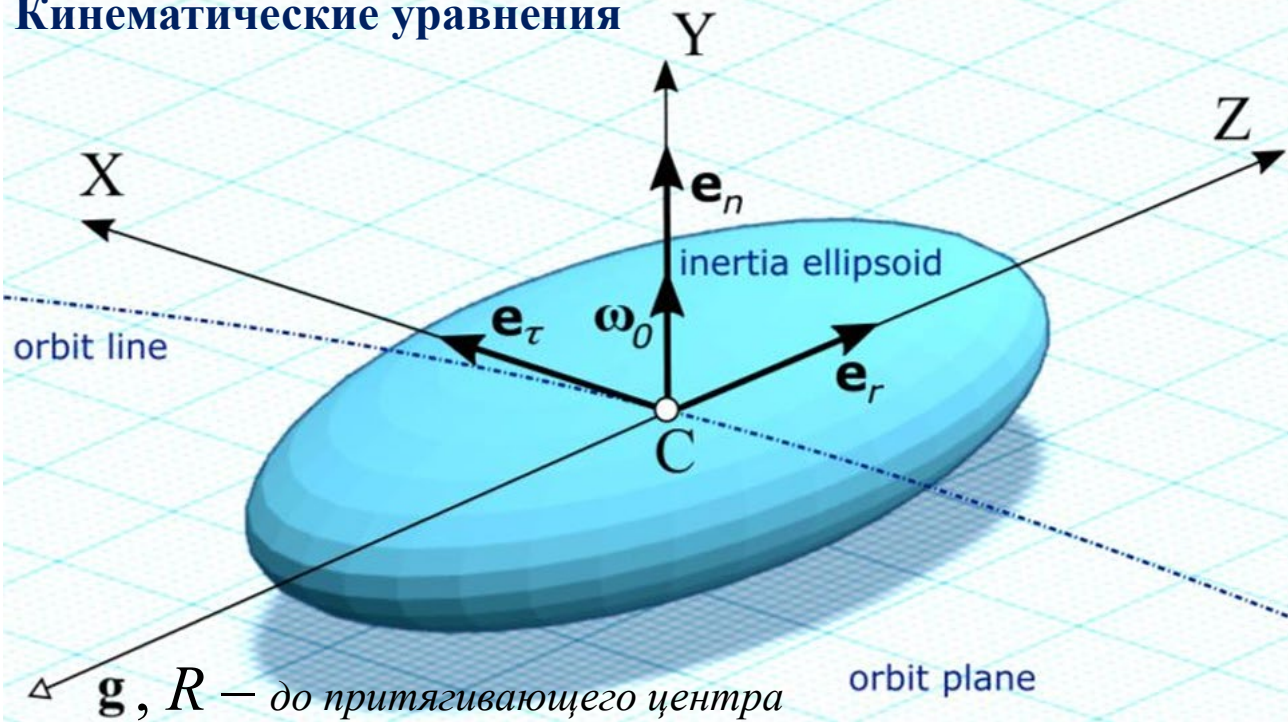
## «Пуассоновы уравнения»

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{e}_r \times \boldsymbol{\omega} + \omega_0 \mathbf{e}_\tau; \\ \frac{d\mathbf{e}_n}{dt} = \mathbf{e}_n \times \boldsymbol{\omega}; \\ \frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt} = \mathbf{e}_\tau \times \boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_r; \end{array} \right. \quad (1)$$

Одна из систем (1) для  $\mathbf{e}_n$  имеет типичную форму уравнений Пуассона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\beta}{dt} = \beta' r - \beta'' q; \quad \frac{d\beta'}{dt} = \beta'' p - \beta r; \\ \frac{d\beta''}{dt} = \beta q - \beta' p; \end{array} \right.$$

## Кинематические уравнения



## «Пуассоновы уравнения»

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{de_r}{dt} = \mathbf{e}_r \times \boldsymbol{\omega} + \omega_0 \mathbf{e}_\tau; \\ \frac{de_n}{dt} = \mathbf{e}_n \times \boldsymbol{\omega}; \\ \frac{de_\tau}{dt} = \mathbf{e}_\tau \times \boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_r; \end{array} \right. \quad (1)$$

Из законов Кеплеровского движения:

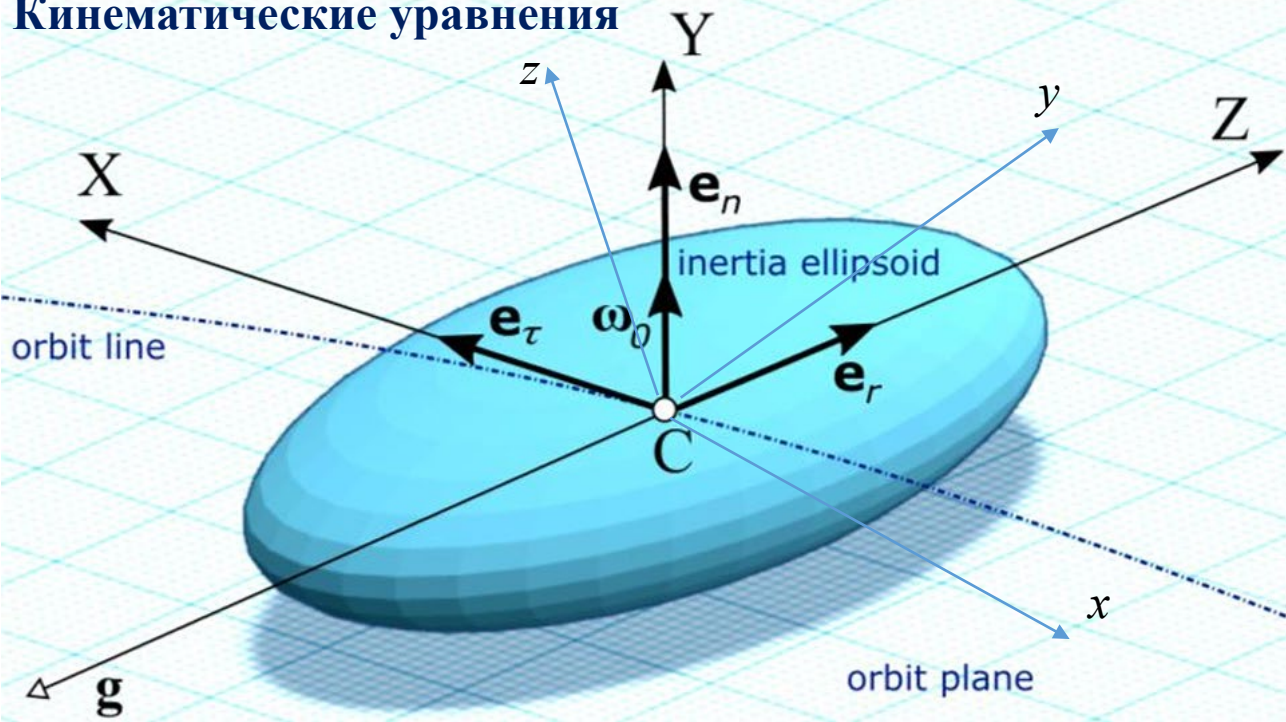
$$R = \frac{P}{1 + e \cos v}; \quad \omega_0 = \dot{v},$$

$$R^2 \dot{v} = \sqrt{\mu P}.$$

$e$  — эксцентриситет орбиты,  
 $P$  — фокальный параметр,  
 $v$  — истинная аномалия



## Кинематические уравнения



## Версия №2:

Добавка величины орбитальной угловой скорости к кинематическим уравнениям эйлерового типа

$Sxyz$  – связанная с телом;  $SXYZ$  – орбитальная

Пусть имеем эйлеров тип углов  $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$  с последовательностью поворотов  $x \rightarrow y \rightarrow z$ , стартуя из положения  $SXYZ$  (углы Крылова).

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}; \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix};$$

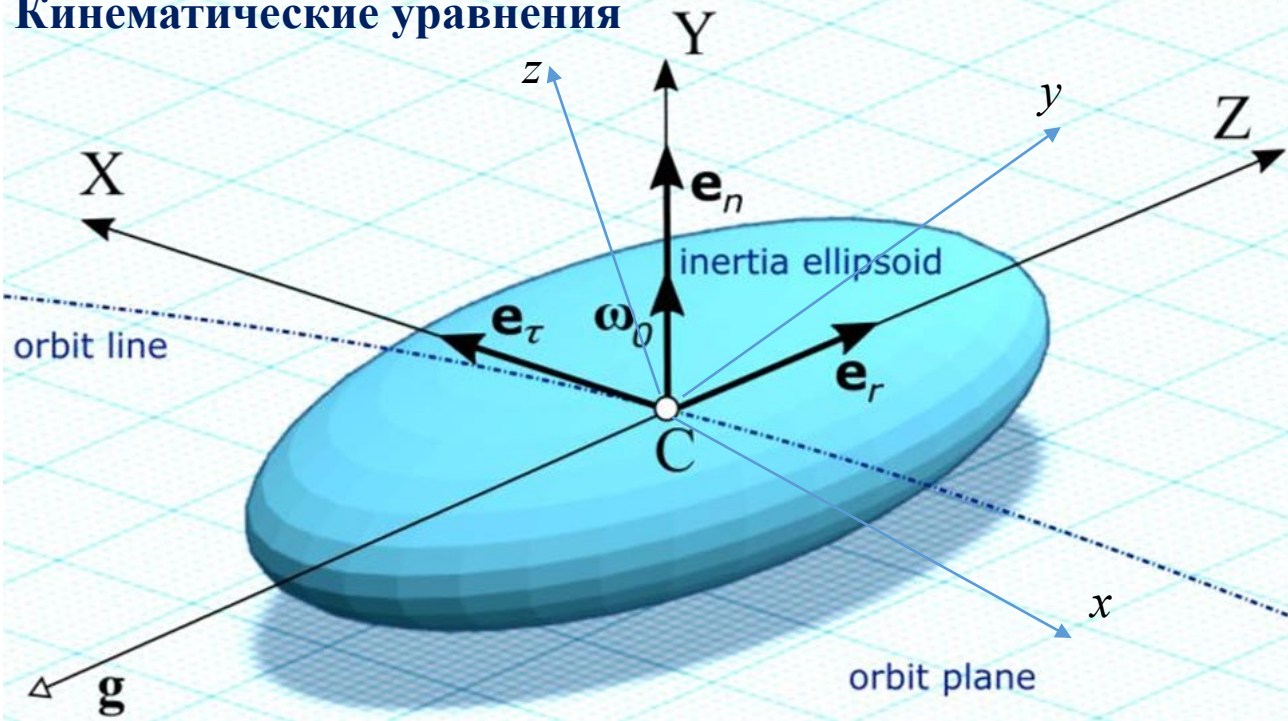
$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \Theta = \Theta_3 \cdot \Theta_2 \cdot \Theta_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 \cos \theta_2 & \sin \theta_3 \cos \theta_1 + \cos \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_3 \sin \theta_1 - \cos \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ -\sin \theta_3 \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \cos \theta_1 - \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_3 \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_2 \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

Тогда в кинематическую систему добавляются проекции орбитальной угловой скорости:

$$\begin{cases} p = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + \omega_0 \Theta_{12}; & q = -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + \omega_0 \Theta_{22}; \\ r = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_3 + \omega_0 \Theta_{32} \end{cases} \quad (2)$$

Их нужно разрешить относительно производных углов  $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$

## Кинематические уравнения



## Версия №2:

Добавка величины орбитальной угловой скорости к кинематическим уравнениям эйлерового типа

$$\begin{cases} p = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + \omega_0 \Theta_{12}; \\ q = -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + \omega_0 \Theta_{22}; \\ r = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_3 + \omega_0 \Theta_{32} \end{cases} \quad (2)$$

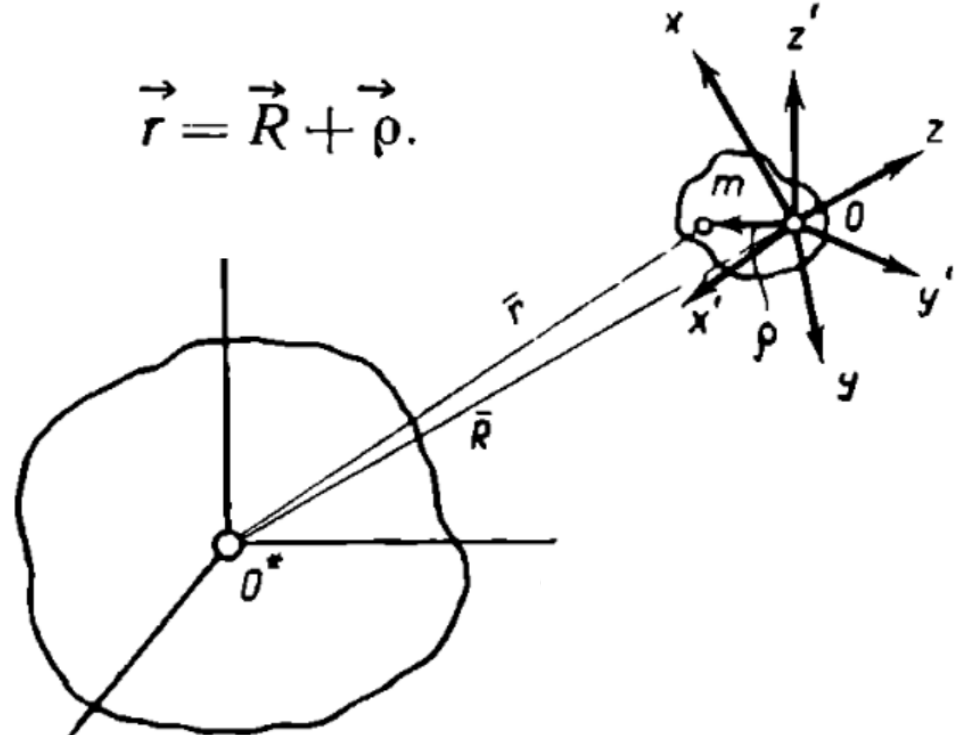
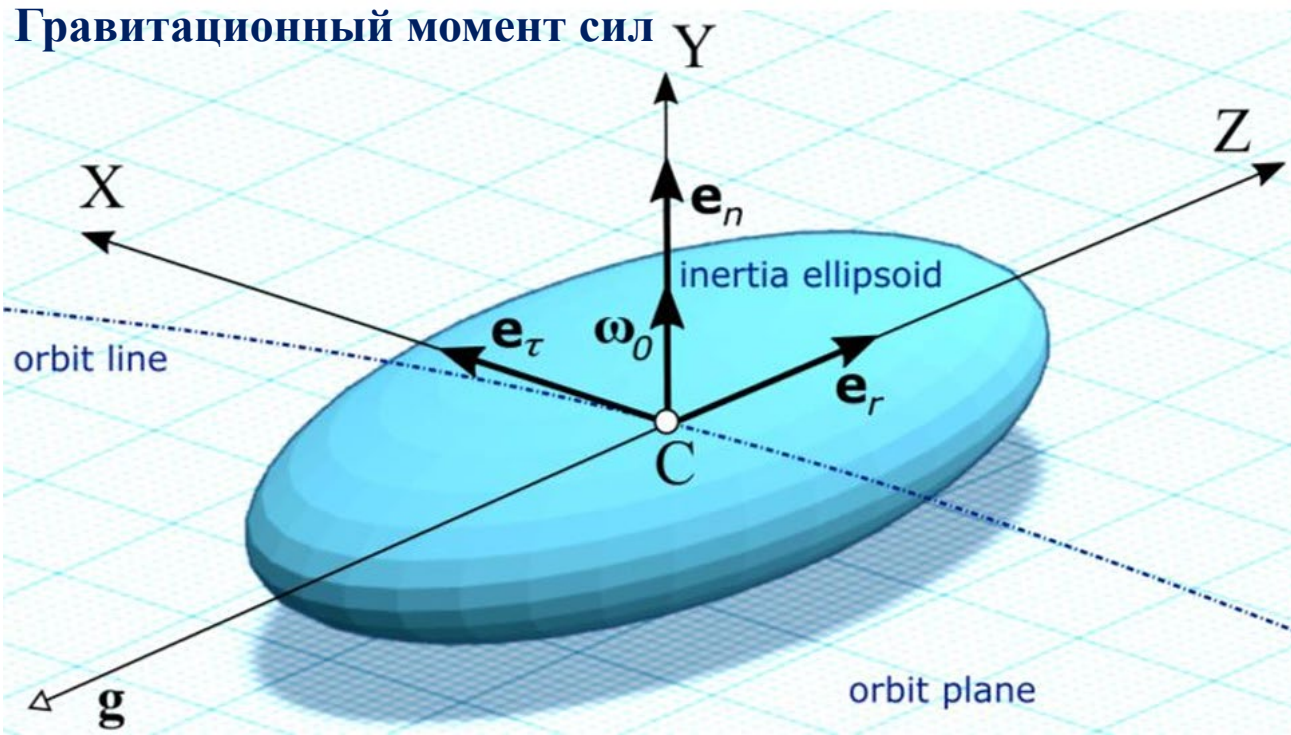
Разрешим относительно производных углов  $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -\frac{1}{\cos \theta_2} (q \sin \theta_3 - p \cos \theta_3 + \cos \theta_3 \omega_0 \Theta_{12} - \sin \theta_3 \omega_0 \Theta_{22}); \\ \dot{\theta}_2 = q \cos \theta_3 + p \sin \theta_3 - \cos \theta_3 \omega_0 \Theta_{22} - \sin \theta_3 \omega_0 \Theta_{12}; \\ \dot{\theta}_3 = r + \operatorname{tg} \theta_2 (q \sin \theta_3 - p \cos \theta_3 + \cos \theta_3 \omega_0 \Theta_{12} - \sin \theta_3 \omega_0 \Theta_{22}) - \omega_0 \Theta_{32} \end{cases} \quad (2')$$

# Гравитационный момент сил



# Гравитационный момент сил



$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R \cdot (\vec{\rho} \cdot \vec{e}_R)} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{R^2 + (x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2R(x'\gamma + y'\gamma' + z'\gamma'')}.$$

Момент гравитационных сил:

$$dU = \frac{\mu}{r} dm, \quad U = \int_U \frac{\mu}{r} dm \quad \rightarrow \quad U = U(R, \gamma, \gamma', \gamma'') \quad \rightarrow \quad d\mathfrak{M} = \rho \times dF$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \gamma'' \frac{\partial U}{\partial \gamma'} - \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma''}, & \mathfrak{M}_y &= \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma''} - \gamma'' \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \\ \mathfrak{M}_z &= \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma'}. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} d\mathfrak{M}_x &= y dF_z - z dF_y = \frac{df}{dr} \frac{R}{r} (y\gamma'' - z\gamma') dm, \\ d\mathfrak{M}_y &= z dF_x - x dF_z = \frac{df}{dr} \frac{R}{r} (z\gamma - x\gamma'') dm, \\ d\mathfrak{M}_z &= x dF_y - y dF_x = \frac{df}{dr} \frac{R}{r} (x\gamma' - y\gamma) dm. \end{aligned} \right\}$$

$$r = \sqrt{R^2 + (x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2R(x'\gamma + y'\gamma' + z'\gamma'')}.$$

$$dU = \frac{\mu}{r} dm, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R \sqrt{1 + \frac{2(x\gamma + y\gamma' + z\gamma'')}{R} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2}}}$$

в ряд по степеням малых величин  $x/R$ ,  $y/R$ ,  $z/R$ . По.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = & \varphi(x, y, z) + \gamma \left[ -\frac{x}{R} + \frac{3x}{2R^3} (x^2 + y^2 + z^2) \right] + \\ & + \gamma' \left[ -\frac{y}{R} + \frac{3y}{2R^3} (x^2 + y^2 + z^2) \right] + \\ & + \gamma'' \left[ -\frac{z}{R} + \frac{3z}{2R^3} (x^2 + y^2 + z^2) \right] + \\ & + \frac{3}{2R^3} (x^2\gamma^2 + y^2\gamma'^2 + z^2\gamma''^2 + 2xy\gamma\gamma' + 2xz\gamma\gamma'' + 2yz\gamma'\gamma'') \\ & - \frac{5}{2R^3} [(x^3\gamma^3 + y^3\gamma'^3 + z^3\gamma''^3) + 3(x^2y\gamma^2\gamma' + x^2z\gamma^2\gamma'' + \\ & + xy^2\gamma\gamma'^2 + xz^2\gamma\gamma''^2 + y^2z\gamma'\gamma''^2 + yz^2\gamma'\gamma''^2) + \\ & + 6xyz\gamma\gamma'\gamma''] + \left(\frac{\rho}{R}\right)^4 (\dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(\gamma, \gamma', \gamma'') = & -\frac{\lambda M}{R^2} (x_G \gamma + y_G \gamma' + z_G \gamma'') - \\
 & -\frac{3}{2} \frac{\lambda}{R^3} (A \gamma^2 + B \gamma'^2 + C \gamma''^2) + \frac{3}{2} \frac{\lambda}{R^4} [(J_{xxx} + J_{xyy} + J_{xzz}) \gamma + \\
 & + (J_{yxx} + J_{yyy} + J_{yzz}) \gamma' + (J_{zxx} + J_{zyy} + J_{zzz}) \gamma''] - \\
 & -\frac{5\lambda}{2R^4} [J_{xxx} \gamma^3 + J_{yyy} \gamma'^3 + J_{zzz} \gamma''^3 + 6J_{xyz} \gamma \gamma' \gamma'' + \\
 & + 3(J_{xxy} \gamma^2 \gamma' + J_{xxz} \gamma^2 \gamma'' + J_{xyy} \gamma \gamma'^2 + J_{xzz} \gamma \gamma''^2 + \\
 & + J_{yyz} \gamma'^2 \gamma'' + J_{yzz} \gamma' \gamma''^2)] + \frac{1}{R} \left( \frac{\bar{\rho}}{R} \right)^4 (\dots) \quad (\bar{\rho} = \max \rho).
 \end{aligned}$$

$$J_{xyz} = \int_{\dot{M}} \sigma xyz \, dm.$$

# Гравитационный момент сил

$$\left\{ \begin{array}{l} A\dot{p} + (C - B)qr = \mathfrak{M}_x = \frac{M\lambda}{R^2} (z_G \gamma' - y_G \gamma'') + \frac{3\lambda}{R^3} (C - B) \gamma' \gamma'', \\ B\dot{q} + (A - C)pr = \mathfrak{M}_y = \frac{M\lambda}{R^2} (x_G \gamma'' - z_G \gamma') + \frac{3\lambda}{R^3} (A - C) \gamma \gamma'', \\ C\dot{r} + (B - A)pq = \mathfrak{M}_z = \frac{M\lambda}{R^2} (y_G \gamma - x_G \gamma') + \frac{3\lambda}{R^3} (B - A) \gamma \gamma', \end{array} \right. \quad (3)$$

Плоское поле тяготения...  
КА вращается вокруг центра масс:  $x_G=y_G=z_G=0$

$$\vec{M} = \frac{3\mu}{R^3} \vec{e}_R \times (\Lambda \vec{e}_R).$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \text{ - главный центральный тензор инерции тела}$$

Эта векторная формула в компонентах по главным центральным осям инерции  $x', y', z'$  дает

$$\begin{aligned} M_{x'} &= \frac{3\mu}{R^3} (C - B) \gamma'' \gamma'; & M_{y'} &= \frac{3\mu}{R^3} (A - C) \gamma \gamma''; \\ M_{z'} &= \frac{3\mu}{R^3} (B - A) \gamma' \gamma. \end{aligned}$$

Для круговой орбиты этот множитель выражается через орбитальную скорость:

$$3\omega_0^2$$

# Гравитационный момент сил

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = \mathfrak{M}_x = \frac{M\lambda}{R^2} (z_G\gamma' - y_G\gamma'') + \\ B\dot{q} + (A - C)pr = \mathfrak{M}_y = \frac{M\lambda}{R^2} (x_G\gamma'' - z_G\gamma) + \\ C\dot{r} + (B - A)pq = \mathfrak{M}_z = \frac{M\lambda}{R^2} (y_G\gamma - x_G\gamma') + \end{cases} \quad \frac{3\mu}{R^3} \vec{e}_R \times (\Lambda \vec{e}_R). \quad (3)$$

Плоское поле тяготения...  
КА вращается вокруг центра масс:  $x_G=y_G=z_G=0$

Если общий центральный тензор инерции тела

$$\begin{aligned} &= 3 \left( \frac{\mu}{R_c^3} \right) [(I_{33} - I_{22})c_{23}c_{33} + I_{23}(c_{23}^2 - c_{33}^2) + I_{31}c_{13}c_{23} - I_{12}c_{33}c_{13}] \\ &= 3 \left( \frac{\mu}{R_c^3} \right) [(I_{11} - I_{33})c_{33}c_{13} + I_{31}(c_{33}^2 - c_{13}^2) + I_{12}c_{23}c_{33} - I_{23}c_{13}c_{23}] \\ &= 3 \left( \frac{\mu}{R_c^3} \right) [(I_{22} - I_{11})c_{13}c_{23} + I_{12}(c_{13}^2 - c_{23}^2) + I_{23}c_{33}c_{13} - I_{31}c_{23}c_{33}] \end{aligned}$$

$c_{13} = \gamma$   
 $c_{23} = \gamma'$   
 $c_{33} = \gamma''$



# Гравитационный момент сил

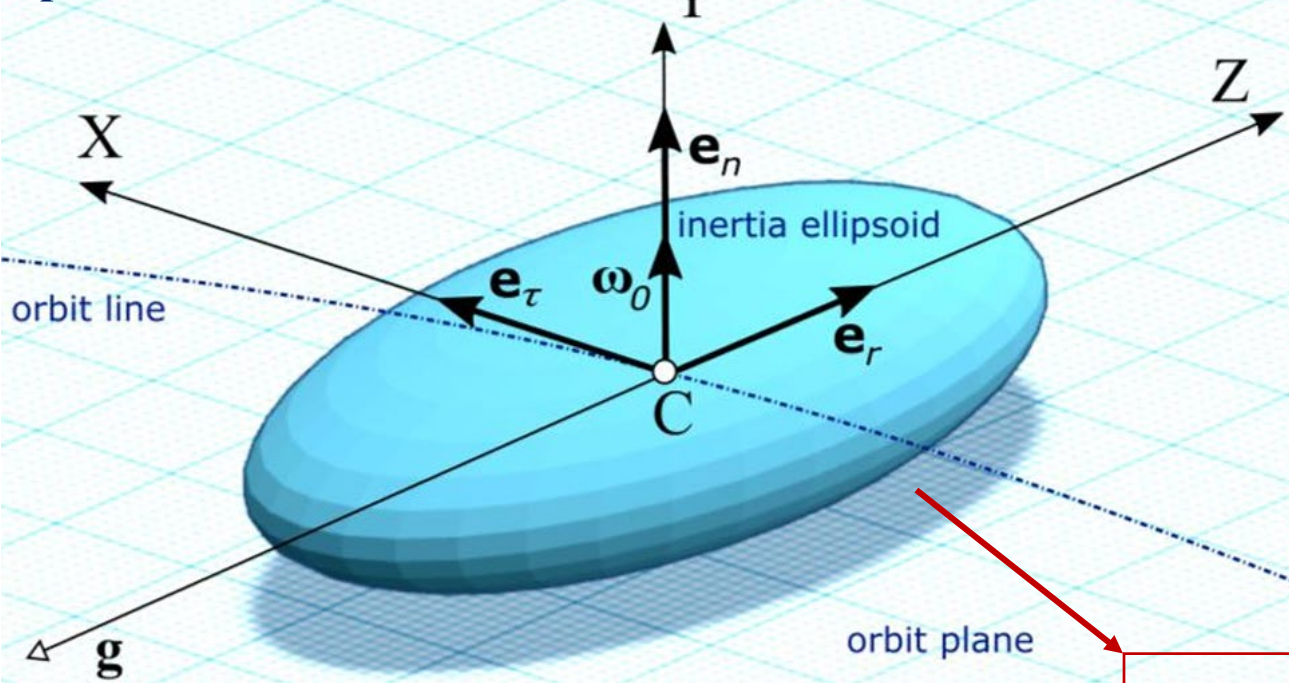
Для кинематики в углах эйлерового типа  $x \rightarrow y \rightarrow z$  :

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 3\omega_0^2 (C - B)\Theta_{23}\Theta_{33}; \\ B\dot{q} + (A - C)pr = 3\omega_0^2 (A - C)\Theta_{33}\Theta_{13}; \\ Cr + (B - A)pq = 3\omega_0^2 (B - A)\Theta_{13}\Theta_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -\frac{1}{\cos \theta_2} (q \sin \theta_3 - p \cos \theta_3 + \cos \theta_3 \omega_0 \Theta_{12} - \sin \theta_3 \omega_0 \Theta_{22}); \\ \dot{\theta}_2 = q \cos \theta_3 + p \sin \theta_3 - \cos \theta_3 \omega_0 \Theta_{22} - \sin \theta_3 \omega_0 \Theta_{12}; \\ \dot{\theta}_3 = r + \operatorname{tg} \theta_2 (q \sin \theta_3 - p \cos \theta_3 + \cos \theta_3 \omega_0 \Theta_{12} - \sin \theta_3 \omega_0 \Theta_{22}) - \omega_0 \Theta_{32} \end{cases}$$

$$\Theta = \Theta_3 \cdot \Theta_2 \cdot \Theta_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 \cos \theta_2 & \sin \theta_3 \cos \theta_1 + \cos \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_3 \sin \theta_1 - \cos \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ -\sin \theta_3 \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \cos \theta_1 - \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_3 \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_2 \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

## Гравитационный момент сил



Таким образом, доказана теорема об устойчивости относительного равновесия (Белецкий [8]). Для устойчивости положения относительного равновесия твердого тела на круговой орбите в ньютоновском центральном поле сил достаточно, чтобы в этом равновесии наибольшая ось эллипсоида инерции твердого тела была направлена по радиус-вектору, наименьшая — по нормали к плоскости орбиты и, следовательно, средняя ось — по касательной к орбите.

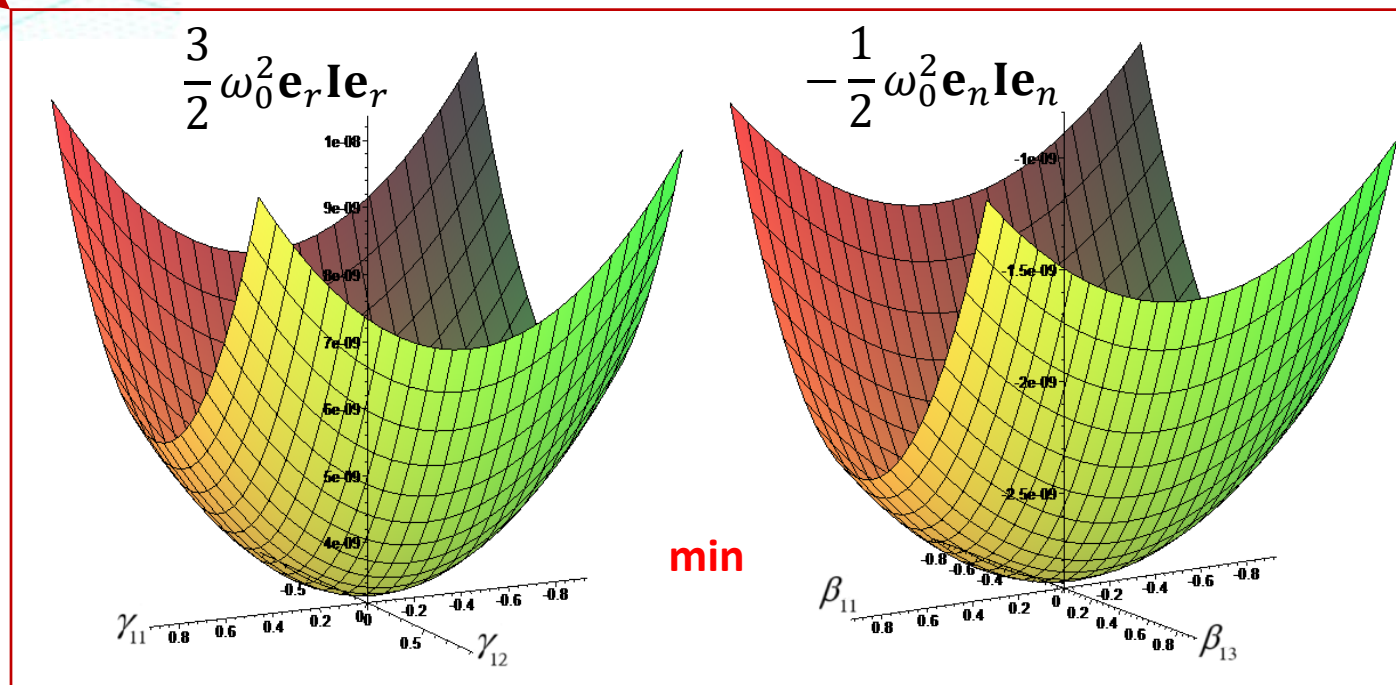
## Положение гравитационного равновесия на орбите

Первый интеграл (Белецкий В.В.) — это база для функции Ляпунова

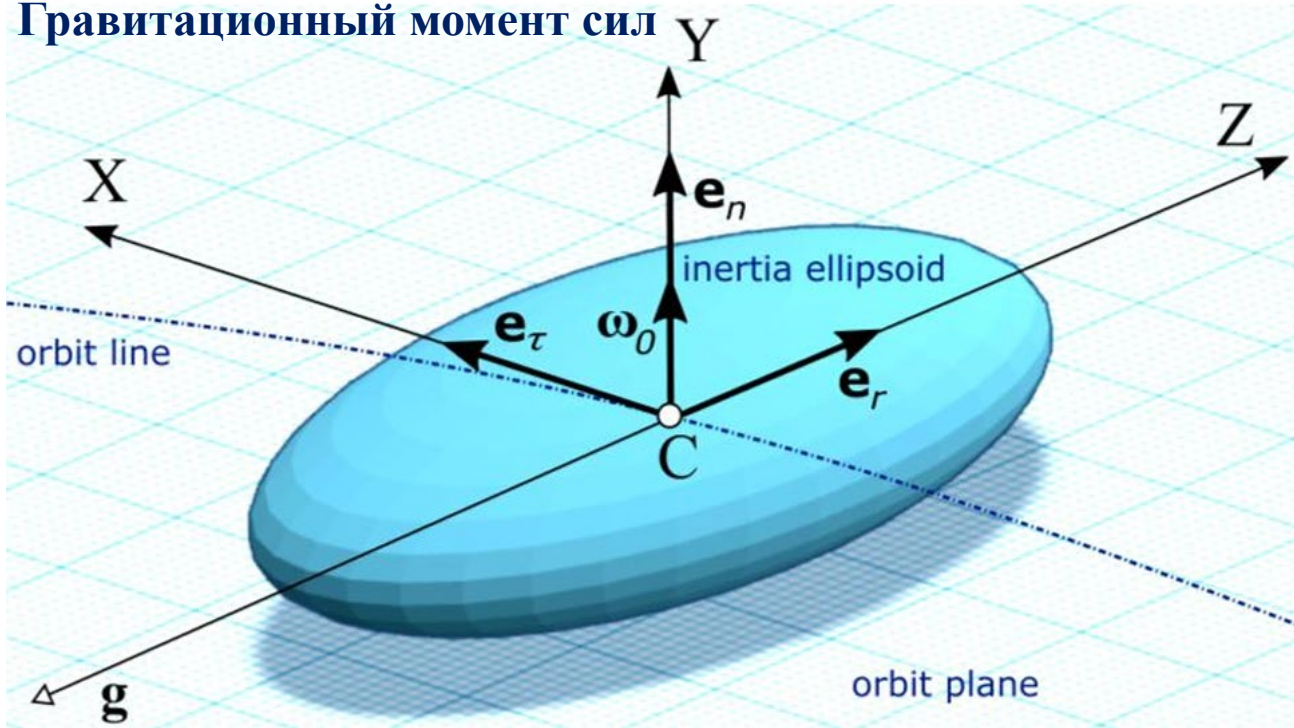
$$V = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\omega} \mathbf{I} \tilde{\omega} + 3\omega_0^2 \mathbf{e}_r \mathbf{I} \mathbf{e}_r - \omega_0^2 \mathbf{e}_n \mathbf{I} \mathbf{e}_n \right] = \text{const}$$

$$\begin{cases} \gamma_3^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2; \\ \beta_2^2 = 1 - \beta_1^2 - \beta_3^2. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{— очевидные связи для} \\ \text{направляющих косинусов} \end{array}$$

$$L(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1, \tilde{r}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2, \tilde{r}_2, \beta_{11}, \beta_{13}, \beta_{21}, \beta_{23}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}) = V - V(\mathbf{0}).$$



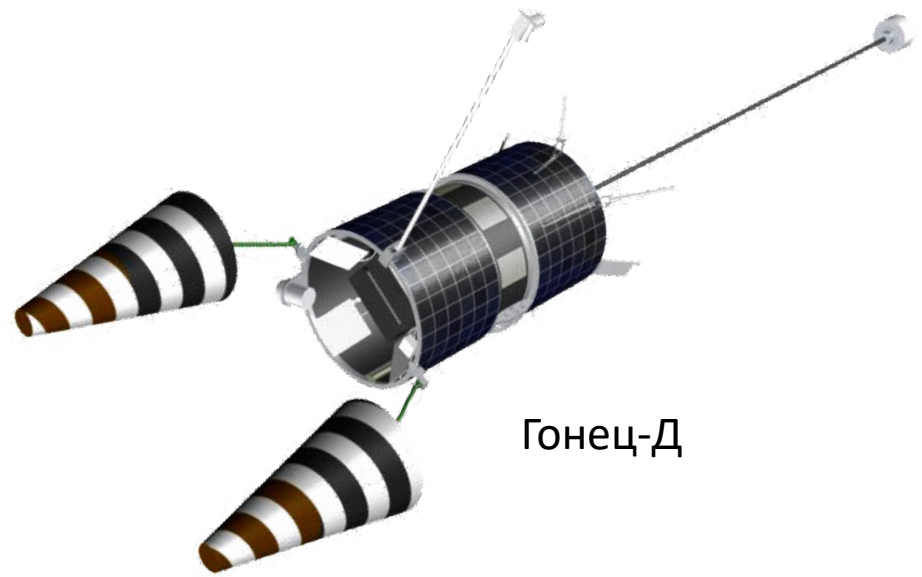
# Гравитационный момент сил



# Положение гравитационного равновесия на орбите



«Можаец»



Гонец-Д

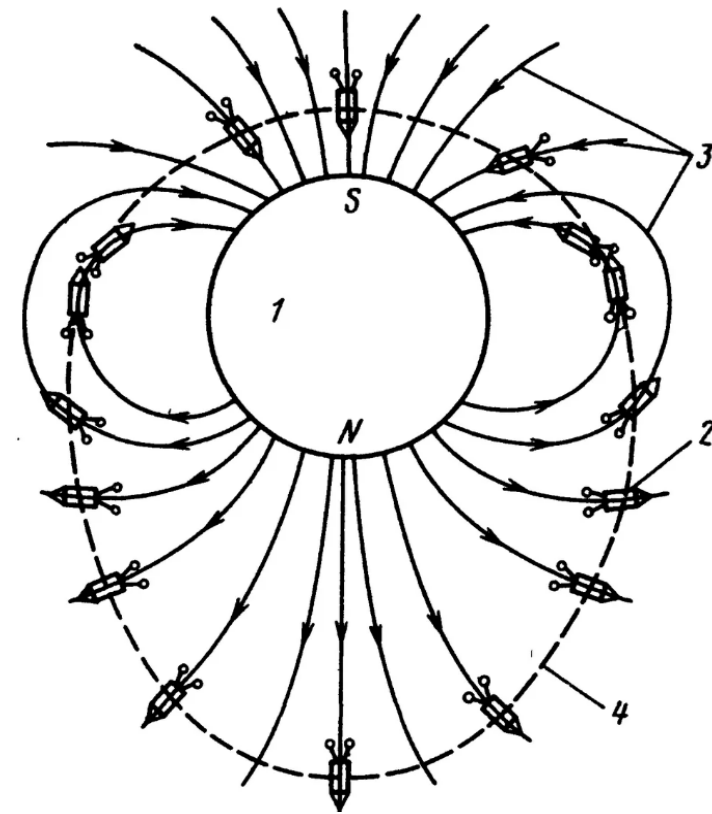
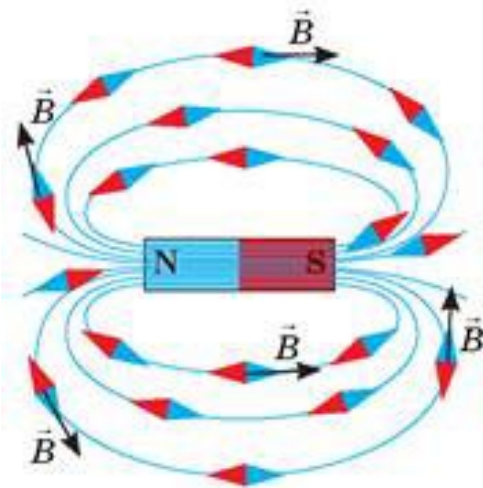
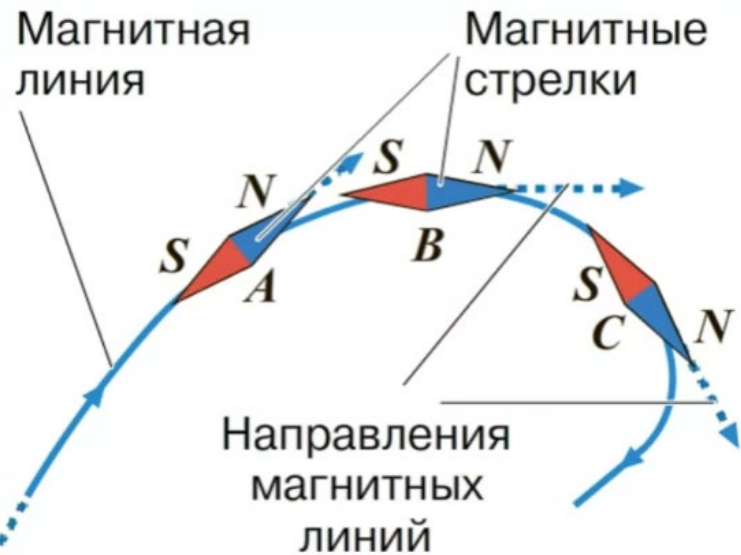
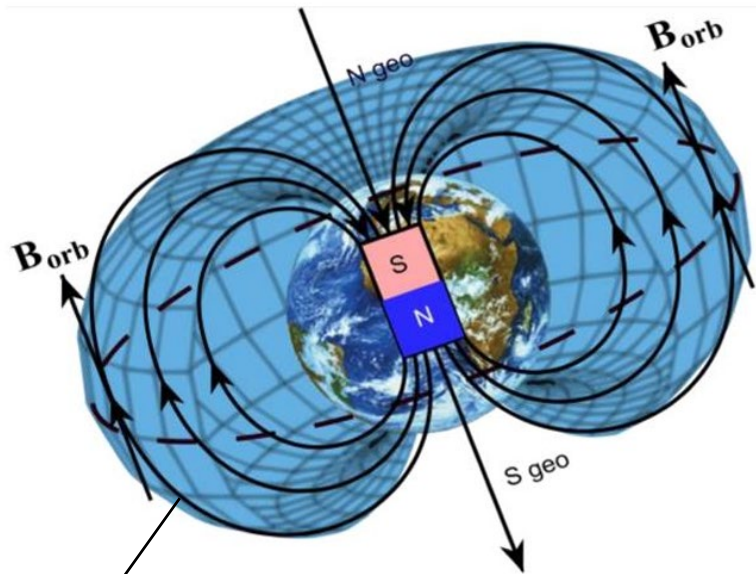


Циклон-Б

# Магнитный момент

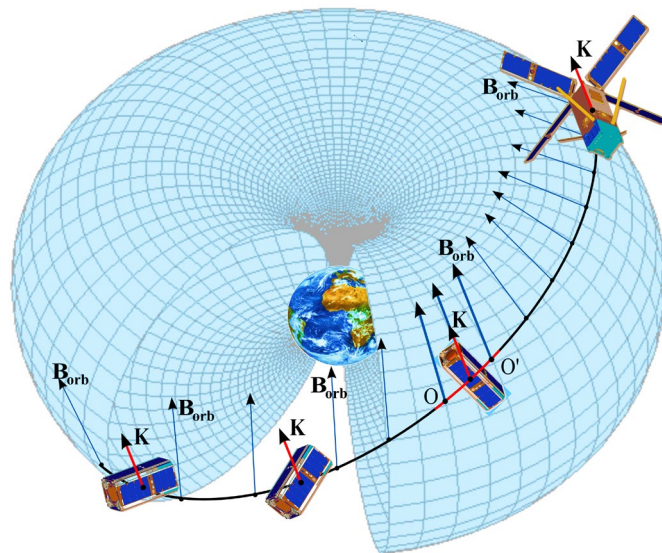


# Магнитный момент сил



$$\mathbb{J} \frac{d\omega}{dt} + \omega \times \mathbb{J} \omega = \mathbf{M},$$

$$\mathbf{M}_{\text{упр}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$



$\mathbf{B}$  – магнитная индукция внешнего поля  
 $\mathbf{m}$  – собственный дипольный момент



## Магнитный момент сил

Наиболее полно геомагнитное поле описывают модели *IGRF* (*International Geomagnetic Reference Field*) и *WMM* (*World Magnetic Model*). Обе модели используют разложение потенциала внутреннего поля в ряд Гаусса

$$V = -R \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \left( g_n^m(t) \cos m\lambda_0 + h_n^m(t) \sin m\lambda_0 \right) P_n^m(\cos \vartheta_0),$$

где  $\lambda_0$  – долгота точки, в которой определяется вектор индукции поля,  $\vartheta_0 = 90^\circ - \theta_0$ ,  $\theta_0$  – ее широта,  $r$  – расстояние от центра Земли,  $R$  – средний радиус Земли,  $g_n^m$  и  $h_n^m$  – коэффициенты (заданы в нТл), определяемые из таблицы [65],  $P_n^m$  – квазинормализованные по Шмидту присоединенные функции Лежандра. Векторы индукции и напряженности поля определяются выражением

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \nabla V,$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  кг·м·А<sup>-2</sup>·с<sup>-2</sup> – магнитная постоянная (или магнитная проницаемость вакуума)

**Модель наклонного диполя** получающаяся из гауссовой модели при учете первых трех слагаемых, описывает поле диполя, наклоненного под углом около 9-12 градусов к оси вращения Земли.

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_e}{r^5} (\mathbf{k}r^2 - 3(\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r})$$

где  $\mathbf{k}$  – единичный вектор в направлении диполя,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор центра масс спутника,  $\mu_e = \mu_0 \mu_m / 4\pi$  – величина, определяемая по трем первым слагаемым разложения,  $\mu_m = 7.7245 \cdot 10^6$  Тл·км<sup>3</sup> – величина диполя Земли.

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$  – инерциальная<sup>1</sup> система координат (ИСК), связанная с положением восходящего узла орбиты спутника.  $O_a$  – центр масс Земли, ось  $O_a Y_3$  направлена по оси вращения Земли,  $O_a Y_1$  лежит в плоскости земного экватора и направлена в восходящий узел орбиты,  $O_a Y_2$  дополняет систему до правой.

В инерциальной системе координат  $O_a Y_1 Y_2 Y_3$  это выражение можно представить в покомпонентном виде

$$\mathbf{B}_Y = -\frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \sin \lambda_2 \sin \delta_1 - 3\xi \cos u \\ -\cos \lambda_2 \sin \delta_1 + 3\xi \cos i \sin u \\ \cos \delta_1 - 3\xi \sin i \sin u \end{pmatrix}$$

Здесь  $r$  – величина радиус-вектора точки, в которой вычисляется индукция. Углы  $\lambda_2$ ,  $\delta_1$  задают ориентацию диполя относительно системы  $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ . Угол  $\lambda_2 = \omega_E t + \lambda_{20}$ , где  $\omega_E$  – угловая скорость вращения Земли, показывает вращение диполя относительно  $O_a Y_1 Y_2 Y_3$  вместе с Землей,  $\lambda_{20} = 106.83^\circ$ ,  $\xi = \cos u \sin \delta_1 \sin \lambda_2 - \sin u \cos i \sin \delta_1 \cos \lambda_2 + \sin u \cos \delta_1 \sin i$ ,  $\delta_1 \approx 170.65^\circ$ ,  $i$  – наклонение орбиты.

**Прямой диполь:**  $\mathbf{k} = (0, 0, -1)$ .  $\lambda_2 = \delta_1 = 0$ ,

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -3/2 \sin i \sin 2u \\ -3/2 \sin 2i \sin^2 u \\ 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u \end{pmatrix}.$$

Величина вектора индукции  $B_0$  изменяется при движении спутника по орбите и составляет

$$B_0 = \frac{\mu_e}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}.$$

## Магнитный момент сил

### Прямой диполь

В орбитальной системе координат:

$$\mathbf{B}_X = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \cos u \sin i \\ \cos i \\ -2 \sin u \sin i \end{pmatrix}.$$

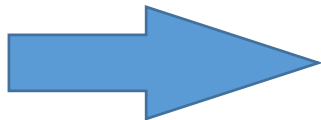
$$u = \nu + \omega,$$

где:

- $u$  — аргумент широты;
- $\nu$  — истинная аномалия;
- $\omega$  — аргумент перицентра.

$$\mathbb{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M},$$

$$\mathbf{M}_{\text{упр}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$



Нужно погасить угловую скорость КА



### Варианты алгоритма демпфирования

Дипольный магнитный момент спутника согласно закону управления  $-\dot{B}$  задается выражением

$$\mathbf{m} = -k \frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

где  $k$  — постоянный положительный коэффициент. При наличии информации об угловой скорости спутника (за счет установки датчика угловой скорости или динамической фильтрации показаний датчиков) возможно использование алгоритма

$$\mathbf{m} = k (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B})$$

или, если речь идет о гашении относительной угловой скорости,

$$\mathbf{m} = k (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}).$$

“ $\dot{B}$ ”

т.е. создается необходимая зависимость дипольного момента  $\mathbf{m}$  для целевого взаимодействия с  $\mathbf{B}$

## Магнитный момент сил

### Прямой диполь

В орбитальной системе координат:

$$\mathbf{B}_X = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \cos u \sin i \\ \cos i \\ -2 \sin u \sin i \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\omega},$$

где:

- $u$  — аргумент широты;
- $\boldsymbol{\nu}$  — истинная аномалия;
- $\boldsymbol{\omega}$  — аргумент перицентра.

$$\mathbb{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M},$$

$$\mathbf{M}_{\text{уп}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

## Нужно погасить угловую скорость КА

“**B-dot**”



$$Bdot \Rightarrow \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{B}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\tilde{d}\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega};$$

$$\mathbf{m} = -k \frac{d\mathbf{B}}{dt} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -k \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{M} = -k \left[ \boldsymbol{\omega} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \right] = -k \left[ B^2 \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} - (pB_x + qB_y + rB_z) \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \right] =$$

$$= -k \left[ B^2 \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} - (pB_x + qB_y + rB_z) \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \right] = -k \begin{bmatrix} p(B^2 - B_x^2) - B_x(qB_y + rB_z) \\ q(B^2 - B_y^2) - B_y(pB_x + rB_z) \\ r(B^2 - B_z^2) - B_z(pB_x + qB_y) \end{bmatrix};$$

# Магнитный момент сил

## Прямой диполь

В орбитальной системе координат:

$$\mathbf{B}_X = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \cos u \sin i \\ \cos i \\ -2 \sin u \sin i \end{pmatrix}.$$

$$u = \nu + \omega,$$

где:

- $u$  — аргумент широты;
- $\nu$  — истинная аномалия;
- $\omega$  — аргумент перицентра.

$$\mathbb{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{J} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M},$$

$$\mathbf{M}_{\text{упр}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

# Нужно погасить угловую скорость КА

# “B-dot”



$$\mathbf{M} = -k \left[ B^2 \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} - (pB_x + qB_y + rB_z) \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \right] = -k \begin{bmatrix} p(B^2 - B_x^2) - B_x(qB_y + rB_z) \\ q(B^2 - B_y^2) - B_y(pB_x + rB_z) \\ r(B^2 - B_z^2) - B_z(pB_x + qB_y) \end{bmatrix};$$

Уравнения:

$$\begin{bmatrix} A\dot{p} \\ B\dot{q} \\ C\dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (C-B)qr \\ (A-C)rp \\ (B-A)pq \end{bmatrix} = -k \begin{bmatrix} p(B^2 - B_x^2) \\ q(B^2 - B_y^2) \\ r(B^2 - B_z^2) \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} -B_x(qB_y + rB_z) \\ -B_y(pB_x + rB_z) \\ -B_z(pB_x + qB_y) \end{bmatrix};$$

В линейной структуре уравнений с нелинейным гироскопическим возмущением

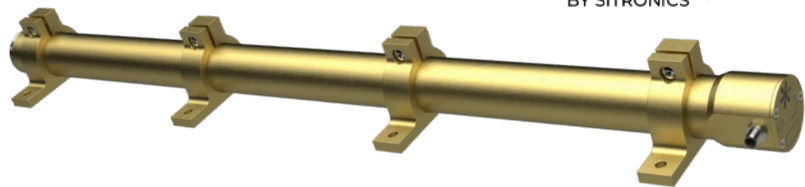
$$\left\{ \begin{bmatrix} A\dot{p} \\ B\dot{q} \\ C\dot{r} \end{bmatrix} = -k \begin{bmatrix} p(B^2 - B_x^2) \\ q(B^2 - B_y^2) \\ r(B^2 - B_z^2) \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} -B_x(qB_y + rB_z) \\ -B_y(pB_x + rB_z) \\ -B_z(pB_x + qB_y) \end{bmatrix} \right\}_{\text{linear}} - \begin{bmatrix} (C-B)qr \\ (A-C)rp \\ (B-A)pq \end{bmatrix}_{\text{gyro}}$$

Экспоненциальное затухание с осцилляциями

ИТОГ = нелинейное колебательное затухание угловых скоростей...



## МАГНИТНЫЕ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОРГАНЫ



Магнитные исполнительные органы (МИО) используются совместно с блоком управления магнитными исполнительными органами (БУМИО) для обеспечения режимов ориентации и стабилизации спутника, не требующих большой точности и быстродействия. Как правило, это режимы, обеспечивающие демпфирование угловой скорости вращения аппарата и разгрузки управляющих двигателей-маховиков. Минимальное количество МИО для установки в космический аппарат - 3 шт.

Артикул	Максимальный момент, А·м <sup>2</sup>	Потребление МИО, Вт	Масса, г	Диаметр МИО, мм	Габариты, мм
SX-MT-1	1	0,4	200	16	140x30x30
SX-MT-5	5	0,6	350	20	220x50x35

